

F. Weiss

**THE BOOK
OF THE MATHS
OF THE BREVET
(Ed. 2021)**

STARBUZZ

EDITIONS

Quelques petits mots

Avec « La Bible », « Les Misérables » et « Oui oui et la gomme magique », vous avez entre les mains le quatrième livre que vous devez absolument lire une fois dans votre vie !

Vous trouverez dans ce livre (en version provisoire), un cours « quasi complet » de ce que vous devez connaître en mathématiques avant de passer le brevet.

Il y a donc dans ces pages, du cours, des explications, des exemples, des exercices, de l'aventure et du suspense ! A vous d'y prendre ce qui vous sera utile, à vous d'essayer de faire les exercices et les exemples avant de regarder les solutions.

A la fin du livre deux chapitres en « bonus » :

- L'art de construire : tout ce qu'il faut pour effectuer correctement des constructions en géométrie.
- L'art de démontrer : des explications sur le raisonnement et la façon de démontrer ou de justifier. Les démonstrations se travaillent, il n'y a pas de recette miracle. Il faut apprendre à en faire seul et comprendre de ses erreurs en lisant les corrections.

Et à la toute fin du livre quatre sujets de brevet blanc pour vous entraîner ! Que du bonheur donc ! (Vous pourrez en trouver plein d'autres sur le net avec des corrections si cela ne vous suffisent pas, gourmands que vous êtes !)

Bonne lecture à tous et bon courage pour vos révisions.

F. Weiss

AU PROGRAMME

Tout ce qui n'est pas géométrie...

• 1 – Quelques symboles et notations	<i>page 9</i>
• 2 – Nombres relatifs : additions & soustractions	<i>page 11</i>
• 3 – Nombres relatifs : produits & quotients	<i>page 15</i>
• 4 – Fractions : égalité, additions & soustractions	<i>page 19</i>
• 5 – Fractions : produits & quotients	<i>page 23</i>
• 6 – Fractions : quelques problèmes...	<i>page 27</i>
• 7 – Les puissances & les puissances de 10	<i>page 31</i>
• 8 – La notation scientifique	<i>page 37</i>
• 9 – Priorités opératoires	<i>page 41</i>
• 10 – Unités & conversions	<i>page 45</i>
• 11 – Unités de temps	<i>page 49</i>
• 12 – Grandeurs composées	<i>page 51</i>
• 13 – Diviseurs & multiples	<i>page 55</i>
• 14 – Nombres premiers & applications	<i>page 61</i>
• 15 – Proportionnalité	<i>page 65</i>
• 16 – Pourcentages	<i>page 71</i>
• 17 – Statistiques	<i>page 75</i>
• 18 - Expressions littérales	<i>page 83</i>
• 19 - Factorisations & développements	<i>page 81</i>
• 20 - Identités Remarquables	<i>page 107</i>
• 21 - Equations	<i>page 123</i>
• 22 - Inégalités & Inéquations	<i>page 139</i>
• 23 - Probabilités	<i>page 153</i>
• 24 - Fonctions	<i>page 185</i>
• 25 - Fonctions linéaires et affines	<i>page 189</i>
• 26 - Représentations graphiques des fonctions	<i>page 193</i>

Tout ce qui est géométrie...

• 27 – Quelques symboles et notations en géométrie	<i>page 219</i>
• 28 – Droites particulières en géométrie	<i>page 223</i>
• 29 – Triangles & polygones	<i>page 225</i>
• 30 – Propriétés de base en géométrie	<i>page 229</i>
• 31 – Propriétés des quadrilatères particuliers	<i>page 135</i>
• 32 – Le théorème de Pythagore & sa réciproque	<i>page 239</i>
• 33 – Trigonométrie	<i>page 249</i>
• 34 – Formules de périmètres & d'aires	<i>page 265</i>
• 35 – L'art de construire	<i>page 267</i>
• 36 – L'art de démontrer	<i>page 291</i>
• 37 - Le théorème de Thalès	<i>page 299</i>

- 38 - Les symétries axiales & centrales *page 317*
- 39 - Les translations *page 327*
- 40 - Les rotations *page 333*
- 41 - Les homothéties *page 341*
- 42 - Les triangles semblables & égaux *page 347*
- 43 - L'art de construire - 2ème Partie *page 355*
- 44 - Géométrie dans l'espace : solides
& représentations *page 371*
- 45 - Géométrie dans l'espace : volumes & surfaces *page 383*
- 46 - Géométrie dans l'espace : utiliser les théorèmes
de géométrie & les formules *page 387*

<i>Pour l'épreuve de maths du DNB...</i>
--

- Quelques conseils pour l'épreuve de maths du brevet *page 397*
- Sujet 1 & correction *pages 401 & 408*
- Sujet 2 & correction *pages 413 & 420*
- Sujet 3 & correction *pages 425 & 433*
- Sujet 4 & correction *pages 437 & 440*

Tout ce qui n'est pas
géométrie...

1 - QUELQUES SYMBOLES & NOTATIONS

Outre les symboles utilisés pour les opérations $+$ $-$ $\times$: et les parenthèses (ou les crochets) utilisées pour les expressions littérales ou numériques, il est important de connaître ceux qui suivent.

- le trait de fraction : utilisé pour écrire un nombre en écriture fractionnaire mais utilisé aussi pour écrire un quotient (c'est à dire une « division »)

Par exemple : $\frac{5}{4}$ représente la fraction « cinq quarts » mais aussi le quotient de 5 par 4, autrement dit : $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1,25$

- les symboles « inférieur à » et « supérieur à » :
on peut écrire $3 < 5$ et $7 > 2$
on ne peut par contre pas écrire $4 < 4$ ou $11 > 11$
- les symboles « inférieur ou égal à » et « supérieur ou égale à » :
on peut écrire $2 \leq 5$ ou $13 \geq 8$
on peut aussi écrire $5 \leq 5$ ou $9 \geq 9$
on ne peut pas écrire $3 \leq 2$ ou $5 \geq 18$

On rappelle aussi qu'un nombre en écriture fractionnaire s'écrit par exemple : $\frac{5}{17}$ ou

$\frac{13}{6}$ ou $\frac{1,5}{3}$ ou $\frac{7}{2,91}$ ou $\frac{3,3}{7,981}$

Dans cette écriture le nombre du haut est le numérateur et celui du bas le dénominateur.

Le mot « fraction » n'est utilisé que si le numérateur et le dénominateur sont entiers.

Par exemple, dans la liste précédente seules $\frac{5}{17}$ et $\frac{13}{6}$ sont des fractions.

Par abus de langage on écrit souvent fraction au lieu de « nombre en écriture fractionnaires » mais il faut faire attention ! Si dans un énoncé on vous demande une fraction il faut respecter cette consigne ! D'ailleurs quand on simplifie une fraction on ne doit donc avoir que des nombres entiers au numérateur et au dénominateur !

NOMBRES RELATIFS : ADDITIONS & SOUSTRATIONS

I. Pour additionner deux relatifs :

Deux règles à retenir !

- Pour additionner deux relatifs de même signe, on ajoute leurs distances à zéro (c'est à dire les « nombres sans les signes ») et on garde le signe commun aux deux nombres.
- Pour additionner deux relatifs de signes contraires on garde le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro et on effectue la soustraction entre la plus grande distance à zéro et la plus petite pour avoir le nombre « derrière le signe ».

Calculer : $(-5) + (-2)$	$(-5) + (-2) = -7$ <i>on garde le signe – commun et on ajoute 5 et 2</i>
Calculer : $(+18) + (+4)$	$(+18) + (+4) = +22$ (ou 22) <i>on garde le signe + commun et on ajoute 18 et 4</i>
Calculer : $(-17) + (+6)$	$(-17) + (+6) = -11$ <i>17 est la plus grande distance à zéro donc on aura – comme signe au résultat</i> <i>On calcule $17 - 6 = 11$</i>
Calculer : $(-5,5) + (+7)$	$(-5,5) + (+7) = +1,5$ (ou 1,5) <i>7 est la plus grande distance à zéro donc on aura + comme signe au résultat</i> <i>On calcule $7 - 5,5 = 1,5$ et voilà...</i>
Calculer : $-18 + 14$	$-18 + 14 = -4$ <i>Ici il s'agit d'une écriture simplifiée, donc on se rappelle que c'est exactement la même chose que $(-18) + (+14)$... en fait on intercale dans sa tête un signe d'addition entre chaque nombre</i> <i>18 est la plus grande distance à zéro, donc le résultat sera négatif</i> <i>On calcule $18 - 14 = 4$</i>
Calculer : $16 - 19$	$16 - 19 = -3$ <i>Si vous avez compris, ce calcul est le même que $(+16) + (-19)$</i>

II. Pour additionner plusieurs relatifs :

Plusieurs méthodes :

- Essayer de repérer des nombres opposés et les barrer puisque leur somme sera nulle.
- Regrouper des termes « intéressants » pour simplifier le calcul.
- Regrouper les positifs ensemble et les négatifs ensemble s'il n'y a rien d'autre d'intéressant à faire...

Calculer : $(-11) + (+8) + (+11) + (-17) + (-2)$	$\cancel{(-11)} + (+8) + \cancel{(+11)} + (-17) + (-2)$ $= (+8) + (-17) + (-2)$ $= (+8) + (-19)$ $= -11$ <i>On a barré -11 et +11 dans la somme car ce sont des nombres opposés</i>
Calculer : $(+3,71) + (-13) + (-14,71) + (-6)$	$(+3,71) + (-13) + (-14,71) + (-6)$ $= (+3,7) + (-14,71) + (-13) + (-6)$ $= (-11) + (-13) + (-6)$ $= -30$ <i>On a regroupé + 3,71 et - 14,71 pour faire disparaître leurs parties décimales</i>
Calculer : $(+16) + (-7) + (+3) + (-5) + (-2)$	$(+16) + (-7) + (+3) + (-5) + (-2)$ $= (+16) + (+3) + (-7) + (-5) + (-2)$ $= (+19) + (-14)$ $= 5$ <i>On a regroupé les positifs ensemble et les négatifs ensemble</i>

III. Pour soustraire un relatif :

Une seule règle à retenir !

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Retrancher (ou soustraire) un relatif revient à ajouter son opposé... <p>Donc on applique cette règle et on utilise les deux règles vues avant !</p> |
|--|

Calculer : $(-11) - (-3)$	$(-11) - (-3)$ $= (-11) + (+3)$ $= -8$
------------------------------	--

Calculer : $(+18) - (+4)$	$(+18) - (+4)$ $= (+18) + (-4)$ $= \underline{14}$ (ou +14)
Calculer : $(-12,3) - (-2,3)$	$(-12,3) - (-2,3)$ $= (-12,3) + (+2,3)$ $= \underline{-10}$
Calculer : $(-18,34) - (-18,34)$	$(-18,34) - (-18,34)$ $= (-18,34) + (+18,34)$ $= \underline{0}$ <i>car la somme de deux nombres opposés est nulle...</i>

IV. Pour calculer une somme algébrique :

C'est simple si elle est donnée sous forme simplifiée car il n'y a alors que des sommes !

Si il y a des soustractions (c'est à dire des « - (un nombre) ») alors il faut les transformer en additions avant (de faire n'importe quoi...)

Attention : si vous changez l'ordre des termes pensez à bien déplacer le nombre et son signe !

Calculer : $18 - 19 + 14 - 7$	$18 - 19 + 14 - 7$ $= 18 + 14 - 19 - 7$ $= 32 - 26$ $= \underline{6}$
Calculer : $-22 + 34 - (-6) + (+2)$	$-22 + 34 - (-6) + (+2)$ $= -22 + 34 + (+6) + (+2)$ $= -22 + 34 + 6 + 2$ $= -22 + 42$ $= \underline{20}$ <i>On a changé la soustraction « - (-6) » en addition « + (+6) », puis on a écrit le calcul sous forme algébrique (forme simplifiée)</i>
Calculer : $11 - 8 - (+3) + 9 - (-4) + 13$	$11 - 8 - (+3) + 9 - (-4) + 13$ $= 11 - 8 + (-3) + 9 + (+4) + 13$ $= 11 - 8 - 3 + 9 + 4 + 13$ $= 11 + 9 + 4 + 13 - 8 - 3$ $= 37 - 11$ $= \underline{36}$ <i>On a transformé deux soustractions en additions, on a écrit le calcul sous forme algébrique et on a regroupé positifs et négatifs</i>

NOMBRES RELATIFS : PRODUITS & QUOTIENTS

I. Pour multiplier deux relatifs :

C'est simple : la distance à zéro du produit (le résultat de la multiplication derrière le signe) est le produit des deux distances à zéro des deux nombres. Le seul problème est de trouver le signe de ce produit donc.

La règle pour obtenir le signe de ce produit est simple :

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est... négatif.

Calculer : $(-6) \times (-4)$	$(-6) \times (-4) = +24$ (ou 24) <i>les deux nombres sont négatifs donc de même signe...</i>
Calculer : $(+11) \times (-5)$	$(+11) \times (-5) = -55$ <i>les deux nombres ont des signes différents</i>
Calculer : $-8 \times (-3)$	<i>Deux façons de faire :</i> $-8 \times (-3) = -(-8 \times (-3)) = -(-24) = +24$ (ou 24) <i>ou :</i> $-8 \times (-3) = (-8) \times (-3) = +24$ (ou 24) <i>c'est dingue ! On trouve pareil !</i>

II. Pour multiplier plusieurs relatifs :

Une règle simple permet de déterminer directement le signe du produit :

- Si le nombre de facteurs (un facteur est un nombre utilisé dans une multiplication) est pair, alors le résultat est positif.
 - Si le nombre de facteurs est impair, le résultat est alors... négatif...
- Une fois le signe trouvé, il suffit donc juste de multiplier ensemble les distances à zéro...

Calculer : $(-3) \times (+2) \times (-5) \times (-10) \times (+4)$	$(-3) \times (+2) \times (-5) \times (-10) \times (+4)$ $= -3 \times 2 \times 5 \times 10 \times 4$ $= -1200$ <i>3 facteurs négatifs, 3 est impair...</i>
---	--

Calculer : $2 \times (-3) \times (-1) \times (+5) \times 7$	$2 \times (-3) \times (-1) \times (+5) \times 7$ $= + 2 \times 3 \times 5 \times 7$ $= 210$ <i>2 facteurs négatifs, 2 est pair...</i>
--	--

III. Pour diviser avec des relatifs :

La règle est la même que pour les multiplications de deux relatifs !

Calculer : $(-28) : (-4)$	$(-28) : (-4)$ $= 28 : 4$ $= 7$ <i>On divise un nombre par un nombre de même signe, donc le résultat est positif</i>
Calculer : $\frac{-25}{5}$	$\frac{-25}{5}$ $= - (25 : 5)$ $= - 5$ <i>On divise un nombre négatif par un nombre positif, donc le résultat est négatif</i> <i>(On rappelle, au cas où, que le trait de fraction est aussi utilisé pour les divisions...)</i>
Calculer : $\frac{42}{-7}$	$\frac{42}{-7}$ $= - (42 : 7)$ $= - 6$ <i>On divise un positif par un négatif, donc le résultat est négatif</i>

IV. Quelques remarques palpitantes :

- Ces règles sont à appliquer aussi lorsque vous travaillerez avec des écritures fractionnaires et des multiplications, car elles permettent de trouver directement le signe du résultat (ou de la fraction simplifiée...)

Par exemple:

Pour connaître le signe de la fraction $\frac{-4 \times (-3) \times 5}{2 \times (-9) \times 11}$ il suffit de compter combien il y a de nombres négatifs (ou de -).

Ici il y en a 3, qui est un nombre impair, donc la fraction sera négative.

Et donc :

$$\frac{-4 \times (-3) \times 5}{2 \times (-9) \times 11} = - \frac{4 \times 3 \times 5}{2 \times 9 \times 11}$$

- Dans une écriture fractionnaire, que le signe soit "en haut" ou "en bas" ou devant le trait de fraction ne change absolument rien...

Par exemple :

$$-\frac{3}{7} = \frac{-3}{7} = \frac{3}{-7}$$

FRACTIONS : EGALITE, ADDITIONS & SOUSTRACTIONS

I. Fractions égales :

La règle essentielle permettant de simplifier par la suite ou permettant de faire des additions ou des soustractions avec les fractions est celle-ci :

- On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou en divisant) son numérateur ou son dénominateur par un même nombre non nul.

Exemples :

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{12}{21}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 9}{3 \times 9} = \frac{45}{27}$$

$$\frac{45}{35} = \frac{9 \times \cancel{5}}{7 \times \cancel{5}} = \frac{9}{7}$$

Ici on dit qu'on a simplifié la fraction par 5 (on fait apparaître 5 en haut et en bas, et on les barre...)

II. Simplifications de fractions :

- Simplifier une fraction signifie trouver, si possible, une écriture plus simple de cette fraction.

Donc pour simplifier une fraction on essaie de décomposer à l'aide de multiplications le numérateur et le dénominateur pour faire apparaître les mêmes nombres, qu'on peut alors barrer.

On procède ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus rien faire. On arrive alors à l'écriture la plus simple possible. On dit qu'on a alors mis la fractions sous forme irréductible.

Simplifier : $\frac{24}{18}$	$\frac{24}{18} = \frac{\cancel{2} \times 12}{\cancel{2} \times 9} = \frac{12}{9} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 3} = \frac{4}{3}$ ou : $\frac{24}{18} = \frac{\cancel{6} \times 4}{\cancel{6} \times 3} = \frac{4}{3}$ <i>Dans les deux cas on obtient $\frac{4}{3}$ fraction irréductible.</i>
Simplifier : $\frac{50}{75}$	$\frac{50}{75} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times 2}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times 3} = \frac{2}{3}$ <i>généralement on fait apparaître directement tous les nombres qu'on peut barrer. Attention de ne barrer les nombres que deux par deux ! (Un deux avec un deux, un trois avec un trois, etc.)</i>

Erreurs à ne pas faire !

On évite de faire ces deux grosses erreurs :

- $\frac{5}{15} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5} \times 3} = 3 \text{ ou } \frac{0}{3}$

C'est totalement faux ! La bonne réponse est $\frac{1}{3}$ car on peut écrire :

$$\frac{5}{15} = \frac{5 \times 1}{5 \times 3}$$

III. Pour additionner ou soustraire avec des fractions :

En fait, il n'y a qu'une seule règle à connaître et elle concerne les fractions de même dénominateur :

- Lorsqu'on effectue des additions ou des soustractions avec des fractions de même dénominateur, on garde le dénominateur et on effectue les opérations avec les numérateurs.

Calculer : $\frac{4}{11} + \frac{6}{11}$	$\frac{4}{11} + \frac{6}{11} = \frac{4 + 6}{11} = \frac{10}{11}$
Calculer : $\frac{13}{5} - \frac{17}{5}$	$\frac{13}{5} - \frac{17}{5} = \frac{13 - 17}{5} = \frac{-4}{5}$

Le problème se pose donc pour des fractions ayant des dénominateurs différents.
La solution est simple : il suffit de les transformer (à l'aide de la règle rappelée sur la page précédente) en fractions de même dénominateur. Ensuite on peut les additionner ou les soustraire dans la joie et la bonne humeur !

Calculer : $\frac{3}{5} + \frac{7}{15}$	$\frac{3}{5} + \frac{7}{15} = \frac{3 \times 3}{3 \times 5} + \frac{7}{15} = \frac{9}{15} + \frac{7}{15} = \frac{16}{15}$ <i>Ici on a transformé uniquement la fraction $\frac{3}{5}$ car l'autre dénominateur 15 est un multiple de 5</i>
--	--

Calculer : $-\frac{7}{3} + \frac{3}{4}$	$-\frac{7}{3} + \frac{3}{4} = \frac{-7 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = -\frac{28}{12} + \frac{9}{12} = -\frac{17}{12}$ <i>Ici on a transformé les deux fractions et on a pris 12 comme dénominateur, obtenu en multipliant les deux dénominateurs. On trouve toujours un dénominateur qui fonctionne en faisant ainsi, mais ce n'est pas forcément le plus petit... (voir exemple suivant...)</i>
Calculer : $\frac{1}{8} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{12} = \frac{1 \times 3}{8 \times 3} + \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{3}{24} + \frac{10}{24} = \frac{13}{24}$ <i>On aurait pu prendre 96 comme dénominateur, obtenu en calculant 8×12... Mais c'est loin d'être le plus petit ! En étant observateur on voit que 24 est multiple de 8 et de 12...</i>
Calculer : $\frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{7}{10}$	$\frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{7}{10} = \frac{12}{30} - \frac{5}{30} + \frac{21}{30} = \frac{28}{30}$ <i>Ici on a pris 30 comme dénominateur (qui est multiple de 5, de 6 et de 10.) On a pas détaillé les transformations mais bon... Vous avez compris non ?</i>
Calculer : $7 - \frac{5}{4}$	$7 - \frac{5}{4} = \frac{7}{1} - \frac{5}{4} = \frac{28}{4} - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}$ <i>Se souvenir de cet exemple ! Un nombre seul s'écrit aussi sous forme fractionnaire avec 1 au dénominateur !</i>

5- FRACTIONS : PRODUITS & QUOTIENTS

I. Multiplications :

- Pour multiplier deux nombres en écritures fractionnaires, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemples :

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$$-\frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1 \times 3}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

Dans le deuxième exemple, on remarque qu'on a utilisé la règle des signes pour une multiplication avec des relatifs. C'est pour cela qu'on obtient ici une fraction positive...

Exemple important : multiplier un nombre par une fraction

$$4 \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7}$$

On multiplie donc uniquement le numérateur par le nombre. Ce qui est logique car ce calcul est le même que : $\frac{4}{1} \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{1 \times 7} = \frac{20}{7}$... puisque que 4 et $\frac{4}{1}$ c'est pareil...

Remarque 1 :

On voit souvent des élèves mettre les fractions sur le même dénominateur pour multiplier... Ce n'est pas faux si on transforme les fractions correctement mais cela ne sert à rien à part compliquer les calculs !

On ne met sur le même dénominateur que pour des additions et des soustractions...

Remarque 2 :

Dans la pratique on ne multiplie pas bêtement les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux... On essaie, pour se simplifier la vie et aussi pour arriver plus facilement à l'écriture irréductible (c'est à dire l'écriture simplifiée au maximum) du résultat, de faire apparaître des multiplications avec les mêmes nombres « en haut et en bas », afin de les barrer...

Calculer et simplifier : $\frac{20}{21} \times \frac{14}{5}$	$\frac{20}{21} \times \frac{14}{5} = \frac{5 \times 4 \times 7 \times 2}{3 \times 7 \times 5} = \frac{4 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$ <i>On a décomposé 20 en 4 X 5 pour faire apparaître un 5, comme il y en a déjà un en bas on va les barrer.</i> <i>On décompose 14 en 2 X 7 et 21 en 3 X 7 pour faire apparaître un 7 en bas et en haut et les barrer.</i>
---	---

Calculer et simplifier : $36 \times \frac{7}{30} \times \frac{15}{6}$	$36 \times \frac{7}{30} \times \frac{15}{6} = \frac{6 \times 6 \times 7 \times 5 \times 3}{6 \times 5 \times 6} = \frac{7 \times 3}{1} = 21$ <i>Quand on barre les 6 deux par deux et les 5, il ne reste plus rien en bas... Mais on rappelle qu'il reste toujours 1 !!!</i>
Calculer et simplifier : $-\frac{5}{11} \times (-\frac{2}{20}) \times (-\frac{1}{3})$	$-\frac{5}{11} \times (-\frac{2}{20}) \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{5 \times 2 \times 1}{11 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3} = -\frac{1}{11 \times 2 \times 3}$ $= -\frac{1}{66}$ <i>Encore une fois on a d'abord cherché le signe du produit, et ici la résultat est négatif car il y un nombre impair de facteurs négatifs...</i>

II. Divisions :

Une règle simple à retenir et à utiliser quand on doit diviser quelque chose par une fraction :

- Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Donc il faut utiliser ce qu'on appelle l'inverse... C'est quoi que ça ? !

Alors l'inverse d'un nombre est obtenu en inversant son numérateur et son dénominateur, tout simplement...

Un nombre qui n'est pas une fraction a aussi un inverse car un nombre « tout seul » a toujours 1 comme dénominateur.

Exemples :

L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$

L'inverse de $-\frac{7}{5}$ est $-\frac{5}{7}$

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$

L'inverse de $\frac{1}{4}$ est 4 ($\frac{4}{1}$...)

On précise (et vous ne l'oubliez pas !) qu'un nombre et son inverse ont le même signe et que l'inverse de 0 n'existe pas !

Donc on va transformer une division en multiplication, et on fait comme dans la partie précédente pour multiplier ! (On décompose et on fait attention aux signes aussi...)

Calculer et simplifier : $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$	$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$ <i>On doit diviser par $\frac{5}{7}$ donc on va multiplier par $\frac{7}{5}$ son inverse</i>
---	--

Calculer et simplifier : $A = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{12}{21}}$	$A = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{12}{21}} = \frac{3}{7} \times \frac{21}{12} = \frac{3 \times 7 \times 3}{7 \times 3 \times 4} = \frac{3}{4}$ <i>Un trait de fraction représente aussi une division. Ici on doit diviser $\frac{3}{7}$ par $\frac{12}{21}$, donc on transforme en multiplication, on décompose et, bingo, on trouve la bonne réponse !</i>
Calculer et simplifier : $B = \frac{5}{\frac{10}{3}}$	$B = \frac{5}{\frac{10}{3}} = 5 \times \frac{3}{10} = \frac{5 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{2}$ <i>Attention à bien écrire : le trait de fraction principal se trouve au niveau du =</i> <i>Donc ici on doit diviser 5 par $\frac{10}{3}$</i> <i>Regardez dans l'exemple ci-dessous ce qui se passe si on change de place le trait de fraction...</i>
Calculer et simplifier : $C = \frac{\frac{5}{10}}{3}$	$C = \frac{\frac{5}{10}}{3} = \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{5 \times 1}{5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$ <i>Ici on doit donc diviser $\frac{5}{10}$ par 3, ce qui veut dire qu'on doit multiplier par $\frac{1}{3}$</i>

Dans les exemples ci-dessus je ne vous ai pas mis de nombres négatifs, mais si vous avez compris pour les multiplications vous devriez y arriver aussi avec ces divisions...

FRACTIONS : QUELQUES PROBLEMES...

Vous aurez souvent à résoudre des problèmes avec des fractions. Je vous donne quelques exemples d'exercices classiques où elles interviennent.

Exemple 1 :

Une pizza pèse 500 g. On en prend $\frac{3}{5}$. Quelle quantité en grammes a-t-on pris ?

Il s'agit ici d'un problème niveau sixième. On rappelle que quand on prend une fraction de quelque chose cela revient à multiplier cette fraction par ce quelque chose.

$$\text{On calcule : } \frac{3}{5} \times 500 = \frac{3 \times 500}{5} = \frac{3 \times 5 \times 100}{5} = 3 \times 100 = 300 \text{ (g)}$$

On a donc pris 300 g de la pizza.

Exemple 2 :

On a pris $\frac{3}{7}$ d'une somme d'argent et cela représente 300 €. Quelle était cette somme d'argent ?

Alors ici c'est le problème inverse du précédent. Cela revient à compléter :

$$\frac{3}{7} \times \dots = 300 \text{ et il faut donc trouver ce qu'il y a la place des pointillés.}$$

Si on a un peu de maîtrise dans les égalités, ou les équations, on sait que si on multiplie à droite et à gauche (ou qu'on divise) par le même nombre nul on a toujours une égalité.

Il faut aussi trouver par quoi on divise pour se débarrasser du $\frac{3}{7}$ qui nous gêne.

Un raisonnement de deux dixièmes de secondes nous montre qu'il faut diviser par... $\frac{3}{7}$

Donc on aura : $\frac{3}{7} \times \dots : \frac{3}{7} = 300 : \frac{3}{7}$ et les $\frac{3}{7}$ à gauche se barrent (car quand on divise un nombre par lui-même cela fait 1...)

$$\begin{aligned} \text{On calcule donc : Somme} &= 300 : \frac{3}{7} = 300 \times \frac{7}{3} = \frac{300 \times 7}{3} = \frac{3 \times 100 \times 7}{3} = 100 \times 7 \\ &= 700 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Donc la somme initiale était de 700 €.

Exemple 3 :

On repeint un salon. Le premier jour on a peint $\frac{1}{5}$ du salon. Le deuxième on a peint $\frac{3}{7}$ du salon.

Quelle fraction du salon reste-t-il à peindre après le deuxième jour ?

Exemple classique. Si on raisonne sans fractions on prend la surface à peindre et on retire ce qu'on a peint le premier jour et le deuxième jour.

Ici comme on raisonne avec des fractions, la surface du salon à peindre est représentée par le nombre 1 (car en fraction c'est la même chose que $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ etc.)

$$\text{On calcule : } 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{7} = \frac{35}{35} - \frac{7}{35} - \frac{15}{35} = \frac{13}{35}$$

Il reste donc à peindre $\frac{13}{35}$ du salon.

Exemple 4 :

Un petit exemple qui ressemble beaucoup au précédent mais avec une différence importante dans l'énoncé qui changera tout... Comme quoi il faut toujours lire un énoncé avec attention...

On repeint un salon. Le premier jour on a peint $\frac{1}{5}$ du salon. Le deuxième on a peint $\frac{3}{7}$ de ce qui restait alors à peindre.

Quelle fraction du salon reste-t-il à peindre après le deuxième jour ?

Vous la voyez la différence ? (Non ? Alors direction ophtalmo...) Ici le deuxième jour on ne repeint pas $\frac{3}{7}$ du salon mais $\frac{3}{7}$ de ce qu'il reste...

$$\text{On calcule : } 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{7} \times (1 - \frac{1}{5})$$

($1 - \frac{1}{5}$) permet de calculer ce qu'il reste à peindre après le premier jour. Et on multiplie ceci par $\frac{3}{7}$ car on peint $\frac{3}{7}$ de ce qu'il reste à peindre... (voir exemple 1...)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{7} \times (1 - \frac{1}{5}) &= 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{7} \times (\frac{5}{5} - \frac{1}{5}) \\ &= 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{7} \times \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{5} - \frac{12}{35} \\
&= \frac{35}{35} - \frac{7}{35} - \frac{12}{35} \\
&= \frac{16}{35}
\end{aligned}$$

Il restera donc à peindre $\frac{16}{35}$ du salon.

Exemple 5 :

Un dernier exemple complet qui reprend un peu tout...

Dans un collège de 450 élèves il y en a $\frac{2}{9}$ en troisièmes.

Parmi ces élèves de troisièmes $\frac{3}{5}$ font allemand.

$\frac{3}{4}$ des élèves de troisièmes qui ne font pas allemand font italien.

- Quelle est la fraction d'élèves du collège étant en troisième et faisant italien ?
- Combien cela représente-t-il d'élèves ?

a) On calcule :

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{5} - \frac{3}{5}\right) \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \\
&= \frac{2 \times 3 \times 2}{9 \times 4 \times 5} \\
&= \frac{2 \times 3 \times 2}{3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5} \\
&= \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{15}$ des élèves sont en troisième et font italien.

b) On calcule :

$$\frac{1}{15} \times 450 = \frac{1 \times 450}{15} = \frac{15 \times 30}{15} = 30$$

donc il y a 30 élèves de troisièmes faisant italien.

7- LES PUISSANCES & LES PUISSANCES DE 10

Les puissances sont utilisées pour remplacer des multiplications où un même nombre est multiplié par lui-même un certain nombre de fois.

On a par exemple : $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$

Ici on lit « 7 puissance 5 » ou « 7 exposant 5 »

Et : $(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3$

Ici on lit « -4 puissance 3 » ou « -4 exposant 3 »

Un nombre élevé à la puissance 2 se lit aussi « au carré » et un nombre élevé à la puissance 3 se lit aussi « au cube ».

Vous n'utiliserez que des puissances entières au collège. Vous ne verrez jamais : $5^{2,7}$ par exemple. Par contre ces puissances peuvent être positives et négatives, et il faut bien comprendre la différence entre les deux !

I. Définitions des puissances :

- Quel que soit le nombre A et quel que soit n un entier positif non nul on définit A puissance n (ou A exposant n) par :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$$

Il y a n fois le nombre A

- Par contre, quel que soit le nombre A on a si n est un entier positif :

$$A^{-n} = \frac{1}{\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n}$$

Il y a n fois le nombre A

$$\text{et donc } A^{-n} = \frac{1}{A^n}$$

- Si A est un nombre non nul alors on a : $A^0 = 1$

Autrement dit, quand on change le signe de la puissance d'un nombre on inverse aussi ce nombre et la puissance 0 de n'importe quel nombre non nul est égale à 1. Pourquoi ? Je vous explique ici en partant de 2^3 et en diminuant la puissance :

$$2^3 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$2^2 = 1 \times 2 \times 2$$

$$2^1 = 1 \times 2$$

$$2^0 = 1$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$$

On voit bien qu'en diminuant la puissance on divise par 2 d'une ligne à l'autre ici...

Par exemple :

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5}$$

$$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}$$

$$54^0 = 1$$

$$(-17)^0 = 1$$

Remarques :

- 0^0 n'existe pas !! Essayez de le calculer avec votre calculatrice si vous vous croyez plus malin que les autres, vous verrez par vous-mêmes ce qu'elle vous répond...
- Attention aux parenthèses avec les puissances ! Par exemple :
 $(-5)^2$ et -5^2 sont différents car :
 $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$ et $-5^2 = -5 \times 5 = -25$
- A cause des règles sur les produits de relatifs, il est facile de comprendre qu'un nombre élevé à une puissance paire est toujours positif, et qu'un nombre élevé à une puissance impaire aura le même signe que ce nombre.
- Un résultat intéressant à connaître sur les puissances d'une fraction :
 $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

Quand on change le signe de la puissance on inverse la fraction...

II. Les puissances de 10 :

Toutes les définitions données précédemment sont valables quelque soit le nombre. Elles restent donc valables pour 10. On a donc facilement que par exemple que :

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \qquad 10^0 = 1$$

Par contre, comme on sait multiplier par 10 facilement ou diviser par 10 facilement il faut savoir ce qui suit, et qui vous servira pour la notation scientifique :

- Si n est un entier positif alors : $10^n = 10 \dots 0$ (*autant de 0 que n*)
- Si n est un entier positif alors : $10^{-n} = 0,0\dots01$ (*autant de 0 que n en comptant aussi celui devant la virgule*)

Par exemple :

$$10^4 = 10\,000 \qquad 10^{-1} = 0,1 \qquad 10^{-3} = 0,001$$

Remarque :

Dans le chapitre sur les unités je vous ai rappelé les préfixes à connaître (kilo, hecto, etc.)

Il en existe d'autres qu'on exprime à l'aide de puissances de 10 :

Giga (G) : 10^9

Mega (M) : 10^6

Micro (μ) : 10^{-6}

Nano (n) : 10^{-9}

Exemples :

$$7,3 \mu\text{m} = 7,3 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,000\,007\,3 \text{ m}$$

$$0,085 \text{ Go (gigaoctets)} = 0,085 \times 10^9 \text{ o} = 85\,000\,000 \text{ o}$$

III. Formules sur les puissances :

Il n'y a que 3 formules à connaître et assez simples à retenir :

1) Puissance d'une puissance :

- Quels que soient le nombre A (non nul) et n et m deux entiers relatifs, on a :
 $(A^n)^m = A^{n \times m} = (A^m)^n$

Autrement dit, quand on prend une puissance d'une puissance on doit multiplier ces puissances.

On retrouve le pourquoi de cette formule en regardant par exemple :

$$(7^2)^3 = (7 \times 7)^3 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6$$

Par exemple :

$$(4^2)^3 = 4^{2 \times 3} = 4^6$$

$$((-2)^4)^{-3} = (-2)^{4 \times (-3)} = (-2)^{-12} = \frac{1}{(-2)^{12}}$$

2) Produits et quotients de nombres élevés à la même puissance :

- Quels que soient les nombre A et B (non nuls) et n un entier relatif, on a :
 $A^n \times B^n = (A \times B)^n$ et $\frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n$

On retrouve le pourquoi de ces formules en regardant par exemple :

$$5^2 \times 4^2 = 5 \times 5 \times 4 \times 4 = 5 \times 4 \times 5 \times 4 = (5 \times 4) \times (5 \times 4) = (5 \times 4)^2$$

Par exemple :

$$4^5 \times 7^5 = (4 \times 7)^5 = 28^5$$

$$\frac{30^7}{6^7} = \left(\frac{30}{6}\right)^7 = 5^7$$

3) Produits et quotients de deux puissances d'une même base :

- Quels que soient le nombre A et n et m deux entiers relatifs, on a :

$$A^n \times A^m = A^{n+m} \quad \text{et} \quad \frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$$

On retrouve le pourquoi de ces formules avec par exemple :

$$\frac{10^4}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10 \times 10 = 10^2$$

Par exemple :

$$17^3 \times 17^5 = 17^{3+5} = 17^8$$

$$\frac{13^4}{13^7} = 13^{4-7} = 13^{-3} = \frac{1}{13^3}$$

$$(-5)^2 \times (-5) \times (-5)^{-8} = (-5)^{2+1+(-8)} = (-5)^{-5} = \frac{1}{(-5)^5}$$

Ici bien faire attention que $(-5) = (-5)^1$!

$$\frac{7^2 \times 7^4}{7^3 \times 7^{-5}} = \frac{7^{2+4}}{7^{3+(-5)}} = \frac{7^6}{7^{-2}} = 7^{6-(-2)} = 7^{6+2} = 7^8$$

Bien remarquer qu'il ne faut pas aller trop vite avec la soustraction sur les puissances ici : beaucoup écriront 7^{6-2} ! !

On peut faire le calcul précédent plus rapidement : il suffit d'ajouter toutes les puissances du haut et de retirer toutes les puissances du bas :

$$\frac{7^2 \times 7^4}{7^3 \times 7^{-5}} = 7^{2+4-3-(-5)} = 7^{2+4-3+5} = 7^8$$

IV. Quelques exemples de calculs utilisant les formules précédentes et les priorités :

Dans chaque exemple on donne le résultat sous la forme d'une puissance positive.

$A = 5^2 \times 25 \times 5^{-4}$	$= 5^2 \times 5^2 \times 5^{-4}$ $= 5^{2+2+(-4)}$ $= 5^0$ $= 1$ <i>Il faut donc parfois penser à faire apparaître une puissance pour pouvoir utiliser les formules...</i>
$B = \frac{4^3 \times 8^3}{32^9}$	$= \frac{(4 \times 8)^3}{32^9}$ $= \frac{32^3}{32^9}$ $= 32^{3-9}$ $= 32^{-6}$ $= \frac{1}{32^6}$ $= \left(\frac{1}{32}\right)^6$

$C = 4^{-2} \times 20^5 \times 5^{-2} \times 7^3$	$= 4^{-2} \times 5^{-2} \times 20^5 \times 7^3$ $= (4 \times 5)^{-2} \times 20^5 \times 7^3$ $= 20^{-2} \times 20^5 \times 7^3$ $= 20^{-2+5} \times 7^3$ $= 20^3 \times 7^3$ $= (20 \times 7)^3$ $= 140^3$
$D = 29^6 \times (10^2)^3$	$= 29^6 \times 10^{2 \times 3}$ $= 29^6 \times 10^6$ $= (29 \times 10)^6$ $= 290^6$

Erreurs à ne pas faire :

Evitez d'inventer des formules qui ne respectent ni les priorités ni les formules précédentes !

Il arrive souvent qu'on lise dans des copies : $4 + 2^7 = 6^7$... ce qui est totalement faux !!!!

8- LA NOTATION SCIENTIFIQUE

Cette notation utilisée tant en maths que dans les matières scientifiques permet d'écrire de manière plus simple des grandeurs très petites ou très grandes.

Elle doit être, comme le reste, parfaitement connue. Vous devez pouvoir passer d'une écriture décimale à une écriture scientifique et inversement. Vous devez aussi pouvoir les utiliser facilement dans les calculs où ils apparaissent.

I. Définition de la notation scientifique :

- Un nombre en notation scientifique (ou écriture scientifique) est un nombre qui s'écrit sous la forme : $A \times 10^n$
où A est un nombre tel que $0 \leq A < 10$
et n est entier relatif

Autrement dit le nombre A s'écrit avec un seul chiffre devant la virgule et ce chiffre n'est pas 0.

Exemples :

$1,745 \times 10^{-4}$ est un nombre en notation scientifique

$8,5 \times 10^3$ est aussi un notation scientifique

7×10^0 est une écriture en notation scientifique tout à fait correcte

$0,45 \times 10^{-3}$ n'est pas une notation scientifique !

$11,2 \times 10^8$ n'est pas une notation scientifique !

$5,4 \times 20^3$ n'est pas une notation scientifique ! (il n'utilise pas une puissance de 10 !)

Remarque :

On peut très bien utiliser la notation scientifique pour des nombres négatifs. La règle est la même, la seule chose qui change est le signe « - » qu'on mettra devant...

Par exemple : $-4,5 \times 10^5$ est un nombre négatif en notation scientifique.

On vous demandera souvent un ordre de grandeur d'un nombre :

- L'ordre de grandeur d'un nombre correspond à sa puissance de 10 en notation scientifique.

La notation scientifique permet de ranger des valeurs dans l'ordre décroissant ou croissant assez facilement. Plus un nombre à un ordre de grandeur élevé plus ils est grand...

Exemples :

L'ordre de grandeur de $7,6 \times 10^{11}$ est 10^{11}

On a $9,8 \times 10^4 < 7,6 \times 10^{11}$ car $10^4 < 10^{11}$

II. Donner la notation scientifique d'un nombre décimal :

Pour passer de la notation décimale à la notation scientifique, et inversement, tout repose simplement sur un déplacement de virgule et sur ces règles simples et déjà connues :

- Si n est un entier positif, multiplier un nombre par 10^n revient à déplacer la virgule de n rangs vers la droite
- Si n est un entier positif, multiplier un nombre par 10^{-n} revient à déplacer la virgule de n rangs vers la gauche.

On va donner l'écriture scientifique de ces nombres :

$A = 548,9$	$= 5,489 \times 10^2$ <i>Pour avoir la notation scientifique du nombre, on doit déjà mettre la virgule entre le 5 et le 4, pour avoir un seul chiffre différent de 0 devant la virgule.</i> <i>Une fois qu'on a trouvé où mettre la virgule, on regarde comment la déplacer pour qu'elle revienne à sa position initiale.</i> <i>Ici il faut la déplacer de 2 rangs vers la droite, donc cela revient à multiplier par 10^2.</i>
$B = 0,087$	$= 8,7 \times 10^{-2}$
$C = - 9210$	$= - 9,21 \times 10^3$
$D = 0,006 \times 10^4$	$= 6 \times 10^{-3} \times 10^4$ $= 6 \times 10^{-3+4}$ $= 6 \times 10^1$ <i>Ici on avait un nombre ressemblant à une notation scientifique. On a transformé la « partie décimale » de ce nombre en notation scientifique avant d'utiliser les formules sur les puissances de 10...</i>

III. Donner l'écriture décimale d'un nombre donné en notation scientifique :

Alors là c'est encore plus simple que la partie précédente. Il suffit de déplacer la virgule dans la « partie décimale » du nombre en notation scientifique vers la gauche ou vers la droite suivant le signe de la puissance.

On va donner l'écriture décimale de ces nombres :

$E = 3,75 \times 10^4$	$= 37\,500$ <i>Comme on a comme puissance 4, on déplace la virgule de 4 rangs vers la droite</i>
$F = 751 \times 10^{-5}$	$= 0,007\,51$ <i>Comme on a comme puissance -5, on déplace la virgule de 5 rangs vers la gauche</i>
$G = -0,04 \times 10^{-2}$	$= -0,000\,4$ <i>Ici vous avez remarqué que le nombre donné au départ n'est pas en notation scientifique mais la technique est la même.</i>
$H = 9,95 \times 10^{-3} \times 10^6$	$= 9,95 \times 10^{-3+6}$ $= 9,95 \times 10^3$ $= 9\,950$ <i>Ici on avait un nombre en notation scientifique multiplié par une puissance de 10. Le plus simple est donc d'utiliser les formules sur les puissances de 10 avant de déplacer la virgule correctement.</i>

IV. Techniques opératoires avec les notations scientifiques :

Il y a en gros trois types de calculs avec les notations scientifiques : lorsqu'on calcule un produit, un quotient, ou une somme (ou différence).

On va calculer les expressions données et donner le résultat sous forme décimale et en notation scientifique :

$I = 3,25 \times 10^2 \times 2 \times 10^{-4}$	$= 3,25 \times 2 \times 10^2 \times 10^{-4}$ $= 6,5 \times 10^{-2}$: notation scientifique $= 0,065$: notation décimale <i>Lorsqu'on calcule un produit, le mieux est de regrouper les nombres qui ne sont pas des puissances de 10 et les puissances de 10 ensemble.</i> <i>Ici on tombe directement sur la notation scientifique.</i> <i>On peut donc en donner la notation décimale facilement.</i>
$J = \frac{1,82 \times 10^5}{5 \times 10^{-2}}$	$= \frac{1,82}{5} \times \frac{10^5}{10^{-2}}$ $= 0,364 \times 10^{5-(-2)}$ $= 0,364 \times 10^{5+(+2)}$ $= 0,364 \times 10^7$ $= 3,64 \times 10^{-1} \times 10^7$ $= 3,64 \times 10^{-1+7}$ $= 3,64 \times 10^6$: notation scientifique $= 3\,640\,000$: notation décimale <i>Lorsqu'on calcule un produit, le mieux est de regrouper</i>

	<i>en deux fractions tout ce qui est puissance de 10 et ce qui ne l'est pas.</i> <i>Ici on arrive à $0,364 \times 10^7$ qui n'est pas en notation scientifique. Donc on transforme 0,364 en notation scientifique avant de d'utiliser les puissances de 10.</i> <i>A la fin on en déduit d'abord la notation scientifique puis la décimale comme dans l'exemple précédent.</i>
K = $3,7 \times 10^{-3} + 7,5 \times 10^3$	= 0,003 7 + 7 500 = 7 500,003 7 : notation décimale = $7,500\,003\,7 \times 10^3$: notation scientifique <i>Dans une somme (ou une différence), le mieux est de remplacer les deux nombres par leurs écritures décimales, d'en déduire le résultat sous forme décimale donc. On en déduit ensuite la notation scientifique.</i>

Remarque :

Si on vous demande le résultat sous les deux formes, il ne faut pas oublier de bien indiquer quelle réponse correspond à la forme décimale et quelle réponse correspond à l'écriture scientifique...

9- LES PRIORITES OPERATOIRES

Que vous travaillez avec des relatifs, des fractions ou même des expressions littérales, il faut connaître les règles sur les priorités opératoires et savoir les appliquer correctement sous peine de ne jamais arriver à effectuer un calcul correctement...

I. Les règles de priorités :

- Dans une expression comportant des opérations entre parenthèses (ou entre crochets) on doit commencer par ses opérations, en respectant les règles qui suivent. S'il y a des parenthèses à l'intérieur d'autres parenthèses on commence par les opérations dans celles qui sont le plus à l'intérieur.
- A l'intérieur de parenthèses, ou dans une expression sans parenthèse, on effectue en priorité et dans l'ordre : les puissances, puis les multiplications et les divisions, puis les additions et les soustractions.

Remarque :

On peut effectuer plusieurs opérations en même temps à chaque étape si les opérations effectuées ne transgressent pas les règles précédentes.

II. Plusieurs exemples :

Il est conseillé de revoir les règles sur les opérations avec les relatifs, les fractions et les puissances...

$$\begin{aligned} A &= (-5) + (-4) \times (+5) - (+6) \\ &= (-5) + (-20) - (+6) \\ &= (-5) + (-20) + (-6) \\ &= (-31) \end{aligned}$$

La multiplication est prioritaire sur l'addition... Et on transforme la soustraction en addition aussi...

$$\begin{aligned} B &= -17 - (-3 - 7 \times (-2)) \\ &= -17 - (-3 + 14) \\ &= -17 - 11 \\ &= -28 \end{aligned}$$

On doit d'abord calculer ce qui est entre parenthèses et à l'intérieur de celles ci la multiplication est prioritaire...

$$\begin{aligned}
 C &= (6 \times \frac{3}{2} + 1) \times (-2 - 5) \\
 &= (\frac{6 \times 3}{2} + 1) \times (- 7) \\
 &= (\frac{2 \times 3 \times 3}{2} + 1) \times (- 7) \\
 &= (9 + 1) \times (-7) \\
 &= 10 \times (-7) \\
 &= - 70
 \end{aligned}$$

On peut effectuer les opérations dans les deux séries de parenthèses en même temps ici...

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) \\
 &= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times (\frac{2}{4} + \frac{3}{4}) \\
 &= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{6}{4} \\
 &= \frac{5}{3} - \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 4} \\
 &= \frac{5}{3} - 2 \\
 &= \frac{5}{3} - \frac{6}{3} \\
 &= - \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Attention ! Beaucoup de personnes ici commencent par faire $\frac{5}{3} - \frac{4}{3}$! Cela attire tellement le regard ces « tiers » à soustraire qu'on oublie qu'il faut d'abord effectuer la multiplication, et pour pouvoir la faire il faut d'abord calculer ce qu'il y a entre parenthèses...

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{3}{2} + (1 - \frac{7}{3})^2 \\
 &= \frac{3}{2} + (\frac{3}{3} - \frac{7}{3})^2 \\
 &= \frac{3}{2} + (- \frac{4}{3})^2 \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{16}{9} \\
 &= \frac{27}{18} + \frac{32}{18} \\
 &= \frac{59}{18}
 \end{aligned}$$

Erreurs « classiques » dans cet exemple : certains écrivent $\frac{3}{2} - \frac{16}{9}$ car ils oublient de

*laisser les parenthèses autour de $-\frac{4}{3}$ et ils oublient aussi qu'un carré est positif...
D'autres trouvent aussi $\frac{8}{6}$ au lieu de $\frac{16}{9}$ car ils confondent prendre le carré et prendre le double...*

$$\begin{aligned} F &= (2 - \frac{3}{5}) : (1 + \frac{1}{3}) \\ &= (\frac{10}{5} - \frac{3}{5}) : (\frac{3}{3} + \frac{1}{3}) \\ &= \frac{7}{5} : \frac{4}{3} \\ &= \frac{7}{5} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{21}{20} \end{aligned}$$

Avant de prendre l'inverse (pour remplacer la division par une multiplication) il faut déjà calculer ce qui est entre parenthèses derrière les « : »

$$\begin{aligned} G &= \frac{4}{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{4}{\frac{5}{15} - \frac{3}{15}} \\ &= \frac{4}{\frac{2}{15}} \\ &= 4 \times \frac{15}{2} \\ &= \frac{2 \times 2 \times 15}{2} \\ &= 30 \end{aligned}$$

On doit ici diviser 4 par ce qui est « au-dessous », donc il faut déjà calculer ce qui est « au-dessous »

$$\begin{aligned} H &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{1 - (\frac{1}{5})^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{1 - \frac{1}{25}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{25}}{\frac{25}{25} - \frac{1}{25}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{\frac{24}{25}}} (*)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{25}{24}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{24} - \frac{25}{24}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{19}{24}}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{24}{19}$$

$$= -\frac{12 \times 2}{2 \times 19}$$

$$= -\frac{12}{19}$$

Cet exemple est plus « complexe » mais il fait intervenir plein de choses intéressantes... Je rappelle qu'à l'étape () on a utilisé le fait que la notation $\frac{1}{x}$ est une des notations de l'inverse (avec x^{-1}) pour passer à $\frac{25}{24}$*

10- UNITES & CONVERSIONS

Tout élève de troisième doit connaître les unités utilisées pour mesurer des grandeurs et doit savoir convertir, c'est à dire passer d'une unité à une autre.

Il suffit de connaître la signification et la position de chaque préfixe, ce petit mot qu'on ajoute devant un nom d'unité pour en changer la grandeur. Si vous savez le faire pour les unités "classiques", vous devriez aussi y arriver pour les unités d'aire (de surface) ou de volume.

I. Les unités "classiques" et les préfixes :

Les unités classiques sont, par exemple le mètre (m), le Litre (L), le gramme (g), mais aussi le Watt (W) ou le Volt (V) utilisés en électricité.

On ajoute un préfixe devant ces unités pour en changer la "grandeur". Par exemple le préfixe déca (da) rend l'unité de base 10 fois plus grand, et le préfixe centi (c) rend l'unité de base 100 fois plus petit.

il suffit de connaître ce tableau pour se repérer et convertir :

k (kilo)	h (hecto)	da (déca)	unité de base	d (déci)	c (centi)	m (milli)
-------------	--------------	--------------	------------------	-------------	--------------	--------------

Ainsi, $1 \text{ kg} = 100 \text{ g}$ / $1 \text{ hg} = 100 \text{ g}$ / etc.

Pour convertir c'est tout simple : on déplace la virgule dans la grandeur donnée de la même façon qu'on va d'une colonne à une autre.

- Vous voulez convertir 17,3 hm en dm ? Pour aller de la colonne hecto à la colonne déci, on se déplace de 3 rangs vers la droite. On déplace la virgule dans le nombre 17,3 de trois rangs vers la droite. On trouve que : $17,3 \text{ hm} = 17\,300 \text{ dm}$
- Vous voulez convertir 5 cL en hL ? On voit qu'on se déplace de 4 rangs vers la gauche pour aller de la colonne centi à la colonne hecto. On déplace la virgule dans le nombre 5 (qui est pour l'instant cachée derrière le 5...) de quatre rangs vers la gauche. On trouve que : $5 \text{ cL} = 0,0005 \text{ hL}$

Remarque :

Il faut aussi connaître d'autres unités comme la tonne (t) et le quintal (q) utilisées pour les masses.

On retient que $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$ et $1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$

Ainsi : $1 \text{ t} = 10 \text{ q}$ et $1 \text{ q} = 0,1 \text{ t}$

II. Les unités d'aires :

On les obtient en prenant les unités de longueur (m, cm, km, etc.) et en y ajoutant une puissance 2 derrière. Ce qui nous donnera du m^2 (mètre carré), du cm^2 (centimètre carré, etc.)

1 m^2 n'est autre que la surface contenue dans un carré de 1 m de côté (d'où le nom de mètre carré... et oui...)

Si vous connaissez le tableau des préfixes donné dans la partie précédente, on obtient exactement le même tableau à une petite différence près :

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
/	/	/	/	/	/	/

Vous remarquez que j'ai partagé chaque colonne en deux ? C'est parce que pour passer d'une unité à l'autre on fait comme pour la première partie mais on « double » le nombre de rangs.

- Convertissons 1,82 km^2 en m^2 . Pour aller du km au m, on se déplace de 3 rangs vers la droite. Donc pour passer du km^2 au m^2 on se déplace de 2×3 rangs vers la droite, donc on déplace la virgule de 6 rangs vers la droite. On trouve que : $1,82 \text{ km}^2 = 1\,820\,000 \text{ m}^2$
- Si on veut convertir 4,7 mm^2 en dm^2 , on voit qu'on se déplace de 2 rangs vers la gauche pour aller du mm au dm, donc on va déplacer la virgule de $2 \times 2 = 4$ rangs vers la gauche pour aller du mm^2 au dm^2 . On trouve alors que : $4,7 \text{ mm}^2 = 0,00047 \text{ dm}^2$

Remarque :

Il faut aussi connaître d'autres unités de surface comme l'are (a) et l'hectare (ha).

Et on retient que $1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2 = 1 \text{ dam}^2$

Et que $1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 100 \text{ dam}^2 = 100 \times 100 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ m}^2 = 1 \text{ hm}^2$

III. Les unités de volume :

L'unité « officielle » est le Litre, mais on utilise aussi les unités comme le m^3 (mètre cube) ou le dam^3 (décamètre cube) ;

Ce sont les unités de longueur avec une puissance 3 derrière.

1 cm^3 est le volume contenu dans un cube de 1 cm de côté... D'où le nom de mètre cube...

Alors si vous êtes logique, vous comprenez tout de suite que pour passer d'une unité de volume avec le ³ à une autre on va multiplier le nombre de rangs par 3 (car on est maintenant en 3 dimensions !)

km ³			hm ³			dam ³			m ³			dm ³			cm ³			mm ³		

- 0,5 dm³ = 0,000 5 m³ car pour passer du dm³ au m³ on se déplace de 1 X 3 = 3 rangs vers la gauche
- 8,231 km³ = 8 231 000 dam³ car pour passer du km³ au dam³ on se déplace de 2 X 3 = 6 rangs vers la droite

Remarque :

On peut passer des unités en Litres aux unités en « cube », et inversement, on se rappelant que 1 L = 1 dm³

Dans le chapitre sur les puissances de 10 je vous donne d'autres préfixes que vous devez connaître en plus de ceux-ci...

11- UNITES DE TEMPS

Il existe deux types d'unités de temps :

- celles qu'on utilise dans la vie courante, quand on donne l'heure ou une durée par exemple : 1h 34min 17s
- les heures décimales, qu'on doit souvent utiliser dans les formules mathématiques

I. Passer d'une heure décimale aux unités classiques :

Alors supposons que vous voyez en exercice : 1,77 h

Il s'agit d'une heure décimale ! (Dans la vie courante on ne met pas de virgule dans l'écriture d'une durée.)

Beaucoup pensent que la partie « derrière » la virgule représente les minutes, et écrivent fièrement que 1,77 h = 1 h 77 min...

Monumentale erreur ! Le jour où verrez écrit sur votre montre « 1h77 » je vous conseille de vite la ramener chez un horloger...

La partie décimale (le 0,77) représente une durée plus petite qu'une heure et il faut donc la convertir en minutes, et éventuellement en secondes, ainsi :

$$\begin{aligned} 1,77 \text{ h} &= 1 \text{ h} + 0,77 \text{ h} \\ &= 1 \text{ h} + 0,77 \times 60 \text{ min} \\ &= 1 \text{ h} + 46,2 \text{ min} \\ &= 1 \text{ h} + 46 \text{ min} + 0,2 \text{ min} \end{aligned}$$

On a transformé les 0,77 h en 46,2 minutes en multipliant par 60 car... il y a 60 minutes dans une heure...

Il reste 0,2 min... qu'on convertit en secondes en multipliant par 60 car... il y a 60 secondes dans une minute...

$$\begin{aligned} &= 1 \text{ h} + 46 \text{ min} + 0,2 \times 60 \text{ s} \\ &= 1 \text{ h} + 46 \text{ min} + 12 \text{ s} \end{aligned}$$

Donc 1,77h = 1 h 46 min 12 s

II. Passer d'une durée « classique » à une heure décimale :

Imaginons qu'on veuille convertir 3 h 45 min 05 s en heure décimale.

Sachant que 45 minutes représentent $\frac{45}{60}$ d'heure (car il y a 60 minutes dans une heure) et que 5 secondes représentent $\frac{5}{3600}$ d'heure (car il y a 3600 secondes dans une heure) on écrit :

$$\begin{aligned}
3 \text{ h } 45 \text{ min } 05 \text{ s} &= 3 \text{ h} + \frac{45}{60} \text{ h} + \frac{5}{3600} \text{ h} \\
&\approx 3 \text{ h} + 0,75 \text{ h} + 0,0014 \text{ h} \\
&\approx 3,7514 \text{ h}
\end{aligned}$$

Et voilà...

III. Transformer une durée en heures, minutes, secondes :

Il arrive parfois qu'on obtienne après calculs une durée de la forme 189 255 s.
C'est bien joli, mais si quelqu'un vous dit qu'il arrive dans 189 255 secondes, je pense que ça ne vous renseignera pas beaucoup.
Vu la taille de cette durée, il y a de fortes chances que cela représente beaucoup de minutes et même d'heures. Alors, allons y pour trouver ce que ça représente plus simplement...

D'abord on cherche combien ça nous fait de minutes.
On calcule $189\,255 : 60$ pour trouver combien cela fait de minutes.
 $189\,255 : 60 = 3154,25 \text{ (min)}$

Cela nous fait donc 3154 minutes entières.
On retire ce nombre de minutes entières pour savoir combien il nous restera de secondes en faisant ainsi :
 $189\,255 - 3154 \times 60 = 189\,255 - 189\,240 = 15$
Il nous restera donc 15 secondes

Maintenant on cherche combien il y a d'heures dans 3154 :
 $3154 : 60 \approx 52,57 \text{ (h)}$

Cela nous fait donc 52 heures entières.
On retire ce nombre d'heures entières pour savoir combien il nous restera de minutes en faisant ainsi :
 $3154 - 52 \times 60 = 3154 - 3120 = 34$
Il nous restera 34 minutes

Il nous reste 52 heures, et on trouve facilement de tête que cela fait 2 jours et 4 h.

Conclusion : $189\,255 \text{ s} = 2 \text{ j } 4 \text{ h } 34 \text{ min } 15 \text{ s}$

12- GRANDEURS COMPOSEES

I. Les grandeurs produits :

- Une grandeur produit correspond au produit de deux grandeurs.

Exemples :

- En multipliant des mètres par des mètres on obtient des mètres carrés. L'aire d'une surface est donc une grandeur produit, obtenue en multipliant deux longueurs.
- Le volume est aussi obtenu en multipliant une longueur par une hauteur par une profondeur. Le volume est donc une grandeur produit.
- L'énergie d'un appareil électrique s'obtient en multipliant la puissance de cet appareil par la durée d'utilisation. C'est donc une grandeur produit. Si la puissance est donnée en kW et la durée en h, on obtient une puissance en kWh.

Remarques :

Rien qu'en regardant l'unité demandée pour une grandeur, on sait qu'il s'agit de mesurer une grandeur produit car l'unité demandée s'écrit avec un produit de deux (ou plusieurs) unités.

Par exemple : $m^2 = m \times m$ $m^3 = m \times m \times m$ $kWh = kW \times h$

Et comme les unités sont multipliées, on sait que pour obtenir la valeur demandée il faut multiplier celles qu'on nous donne.

II. Les grandeurs quotients :

- Une grandeur quotient correspond au quotient de deux grandeurs.

C'est simple de repérer des grandeurs quotients : l'unité demandée correspond à une unité divisée par une autre unité.

Donc déterminer une grandeur quotient, il s'agit de diviser une grandeur par une autre en respectant les unités.

Exemples :

- Une vitesse en km/h se calcule donc en divisant des km par des h. Donc en divisant une distance par une durée.
- Une concentration en g/L se calcule en divisant une masse (en g) par un volume en (L).

- Une densité de population en hab/km² se calcule en divisant un nombre d'habitants par une surface (km²).

Remarque :

Il existe une autre notation pour les grandeurs quotients que celle utilisant la barre oblique (/).

On note par exemple une vitesse en m/s sous la forme : m.s⁻¹ (mètres par seconde)

III. Exemples de conversions avec les grandeurs composées :

Si on vous demande de passer d'une unité de grandeur composées à une autre, il faut convertir, étape par étape sauf cas particulier, les unités des grandeurs intervenant.

En faisant ainsi on ne peut, normalement, pas se tromper !

Exemples :

- Un appareil électrique a une puissance de 2000 W et fonctionne pendant 2h 30 min. Calculer l'énergie dépensée par cet appareil en kWh :
Alors déjà : 2000 W = 2 kW
et : 2h30min = 2,5 h (*revoir la partie sur les unités...*)
Donc :
énergie = 2 X 2,5 kWh = 5 kWh
L'appareil a consommé 5 kWh.

- Convertir 175 cg/L en g/dal :
On a : 175 cg/L = 1,75 g/L *on transforme les cg en g déjà*
Ensuite comme 1 dal = 10 L on aura une quantité 10 fois plus grande dans 1 dal que dans 1 L, donc :
1,75 cg/L = 17,5 g/dal

On peut aussi procéder ainsi :

$$175 \text{ cg/L} = \frac{175 \text{ cg}}{1 \text{ L}} = \frac{1,75 \text{ g}}{0,1 \text{ dal}} = 17,5 \text{ g/dal}$$

- Convertir 60,7 m/s en km/h :
On a :
60,7 m/s = 0,0607 km/s
Comme 1 h = 3600 s, alors :
0,0607 km/s = 3600 X 0,0607 km/h = 218,52 km/h

On peut aussi procéder ainsi :

$$60,7 \text{ m/s} = \frac{60,7 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{0,0607 \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 0,0607 \times \frac{3600}{1} \text{ km/h} = 218,52 \text{ km/h}$$

$$\text{On a } 3600 \text{ s} = 1 \text{ h donc } 1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h}$$

et diviser par $\frac{1}{3600}$ revient à multiplier par $\frac{3600}{1}$

IV. Rappels sur les vitesses, le temps et la distance :

Une seule formule à connaître : $\boxed{\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}}$
permet de retrouver les deux autres :

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} \rightarrow \text{vitesse} \times \text{temps} = \frac{\text{distance}}{\cancel{\text{temps}}} \times \cancel{\text{temps}}$$
$$\rightarrow \boxed{\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps}}$$

$$\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps} \rightarrow \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{\cancel{\text{vitesse}} \times \text{temps}}{\cancel{\text{vitesse}}}$$
$$\rightarrow \boxed{\text{temps} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}}$$

Donc pour calculer une vitesse on divise une distance par une durée,
pour calculer une distance on multiplie une vitesse par une durée
et pour calculer une durée on divise une distance par une vitesse

Remarques :

Lorsque vous utilisez ces grandeurs composées, attention à bien respecter la cohérence des unités !

- Si vous avez une vitesse en km et une durée en min, vous obtiendrez une vitesse en km/min
- Si vous avez une vitesse en km/h et que vous voulez calculer une distance, il faut que dans la formule « distance = vitesse X temps » le temps soit en h, sinon cela ne fonctionne pas. Vous obtenez alors une distance en m.

Exemple :

1) Le grondement du tonnerre met 5 s à nous parvenir.

Calculer la distance qui me sépare de l'orage (vitesse du son = 330 m/s) :

On cherche une distance ici :

$$\begin{aligned}\text{distance} &= v \times t \\ &= 330 \times 5 \\ &= 1650 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Nous sommes donc à 1650 m de l'orage.

La vitesse est en m/s et le temps en s, donc il n'y a pas de problèmes d'unités, et on trouve la réponse en m.

2) Calculer le temps mis par la lumière venant de cet orage pour arriver jusqu'à nous. (vitesse de la lumière = 300 000 km/s)

Ici la distance est en m et la vitesse en km/s. Il y a donc un problème sur les unités de longueur pour pouvoir utiliser la formule. On va donc convertir la distance en km avant d'utiliser la formule.

$$d = 1650 \text{ m} = 1,65 \text{ km}$$

$$\text{temps} = \frac{d}{v}$$

$$= \frac{1,65}{300\,000} \text{ (s)}$$

$$= 0,000\,005\,5 \text{ (s)}$$

La lumière a mis 0,000 005 5 s pour nous parvenir.

(Ce qui explique qu'on voit toujours les éclairs avant d'entendre la foudre lorsqu'il y a de l'orage, la lumière se déplaçant beaucoup plus vite que le son !)

13- DIVISEURS & MULTIPLES

Toutes les notions vues dans ce chapitre ne sont valables que pour les nombres entiers !

On peut déjà retenir qu'un nombre est multiple d'un autre s'il est dans sa table. (Je parle de sa table de multiplication, inutile de vous précipiter chez IKEA !)

Et un nombre est un diviseur d'un autre s'il le divise parfaitement, c'est à dire s'il ne reste rien de rien après la division.

I. Les divisions euclidiennes :

- Effectuer la division euclidienne d'un nombre ENTIER A par un nombre ENTIER B non nul, c'est trouver combien de fois on peut mettre B dans A et combien il reste.

Exemples :

On peut mettre 4 fois 8 dans 35 et il reste 3.

On peut écrire ceci avec l'égalité : $35 = 4 \times 8 + 3$ ou $35 = 8 \times 4 + 3$

On vient d'effectuer la division euclidienne de 35 par 8. On obtient 4 comme quotient et 3 comme reste. Le nombre 35 est aussi appelé dividende et le nombre 8 diviseur.

Si on effectue la division euclidienne de 55 par 11 on trouve 5 comme quotient et 0 comme reste : $55 = 5 \times 11 + 0$

Remarques :

Le reste obtenu doit être inférieur au diviseur... Si on divise par 6 il ne peut pas rester 7 ou 8 ou 9 etc.

II. Les multiples :

- Les multiples d'un nombre entier A sont obtenus en effectuant $A \times 0$, $A \times 1$, $A \times 2$, etc.

Exemples :

Les premiers multiples de 7 sont : 0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; ...

Les 5 premiers multiples de 13 sont : 0 ; 13 ; 26 ; 39 ; 52

Remarques :

La liste des multiples d'un nombre est infinie. On ne vous demandera que les x premiers ou ceux qui seront compris entre tel nombre et tel nombre

Le plus petit multiple d'un nombre est toujours 0 quelque soit ce nombre !

Petit exercice où beaucoup d'élèves se trompent :

Déterminer tous les multiples de 21 compris entre 200 et 300 :

En étant « malin », on sait que $21 \times 10 = 210$ est un multiple de 21 compris entre 200 et 300.

Il suffit de retirer (ou d'ajouter) plusieurs fois 21 à 210 pour trouver assez facilement ceux qui sont compris entre 200 et 300. On trouve la liste suivante :

210 ; 231 ; 252 ; 273

Et là, beaucoup d'élèves tombent dans le panneau et prennent 200 comme point de départ et annoncent avec fierté la liste suivante : 200 ; 221 ; 242 ; ...

Mais, bien sûr, vous avez remarqué que 200 n'est pas dans la « table » de 21...

III. Les diviseurs :

- Un nombre ENTIER B non nul est un diviseur d'un nombre ENTIER A si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exemples :

La division euclidienne de 45 par 9 a pour quotient 5 et pour reste 0.

On en déduit qu'on peut écrire $45 = 5 \times 9$

et que 9 est donc un diviseur de 45.

On en déduit aussi assez logiquement que 5 est un autre diviseur de 45.

On peut aussi dire que 45 est divisible par 5 (ou divisible par 9)

et que 45 est un multiple de 5 (ou de 9)

Ne vous mélangez pas les pédales avec ces différents termes !

Remarques :

1 est un diviseur de n'importe quel nombre entier. C'est même le plus petit !

Un nombre est toujours divisible par lui-même. C'est même son plus grand diviseur !

Donc le nombre de diviseurs d'un nombre est toujours fini et on peut donc toujours tous les donner.

Le but des exercices est souvent soit de vérifier si un nombre est un diviseur d'un nombre ou de deux nombres (on parle alors de diviseur commun), ça c'est assez simple à faire avec la vérification que le reste est bien 0 , soit de trouver tous les diviseurs d'un nombre. Là il faut essayer de ruser pour tous les trouver et je vous mets un exemple complet pour que vous revoyez comment on fait :

Déterminer tous les diviseurs de 72 :

1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 9 – 12 – 18 – 24 – 36 – 72

Alors, il faut déjà comprendre qu'il vaut mieux donner les diviseurs dans l'ordre croissant afin de ne pas en oublier.

La méthode la plus simple est de les trouver deux par deux car quand on a un diviseur on en a un autre automatiquement.

Le plus petit est 1 et le plus grand est le nombre lui-même, 72.

Comme le nombre est pair, on peut le diviser par 2 : on obtient 2 et 36 comme diviseurs (puisque $72 = 2 \times 36$)

Comme 72 est divisible par 3, on a 3 comme diviseurs et $72 = 3 \times 24$. Donc 24 est un diviseur de 72 aussi.

72 est divisible par 4 et $72 = 4 \times 18$, donc 18 est aussi un autre diviseur.

72 n'est pas divisible par 5, donc inutile de vérifier si 72 est divisible par les multiples de 5 (5 ; 10 ; 15 ; etc.)

72 est divisible par 6 et $72 = 6 \times 12$, donc 12 est un autre diviseur.

Comme on trouve chaque fois le plus petit diviseur restant et le plus grand restant, il n'y a plus qu'à essayer si 7 ; 8 ; 9 ; 10 et 11 fonctionnent.

72 n'est pas divisible par 7 (les plus proches multiples de 7 sont en effet 77 et 70...) donc 7 n'est pas un diviseur

72 est divisible par 8 et $72 = 8 \times 9$ donc 9 est un diviseur.

Comme il n'y a plus de nombres entiers entre 8 et 9, on a terminé la liste.

Remarques :

Avec une calculatrice cela se fait assez rapidement, mais essayez de ne pas tout tester à la calculatrice sinon vous perdrez du temps...

Un diviseur d'un diviseur est aussi un diviseur. Dans l'exemple ci-dessus, on voit que 24 est un diviseur de 72. Comme 24 est divisible, entre autres, par 12 et par 2, on sait que 12 et 2 seront aussi des diviseurs de 72.

Avec la technique donnée dans l'exemple ci-dessus, on aura de moins en moins de nombres à tester comme diviseurs. Pensez aussi à zapper les multiples de nombres qui ne sont pas des diviseurs (Par exemple, si un nombre n'est pas divisible par 2 vous pouvez zapper tous les multiples de 2, c'est à dire les nombres pairs.)

IV. Les critères de divisibilité :

Il existe certaines règles pour savoir rapidement (sans calculatrice en plus !) si un nombre est divisible par certains petits nombres.

- Un nombre est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8)
- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5
- Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9
- Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Quelques petits exemples sur ce qu'on vient de voir :

Le nombre 721 001 403 est-il divisible par 3 ? Par 9 ?	On a : $7 + 2 + 1 + 1 + 4 + 3 = 18$ Et 18 est divisible par 3 (si on ne le sait pas on regarde si 18 est divisible par 3 en ajoutant ses chiffres : $1 + 8 = 9$, et 9 est divisible par 3...) Donc 721 001 403 est divisible par 3. Il est aussi divisible par 9 car la somme de ses chiffres est divisible par 9. <i>Si le nombre n'avait pas été divisible par 3, inutile de regarder s'il était divisible par 9...</i>
Trouver par quel(s) chiffre(s) remplacer la lettre K dans le nombre : 7K 21K pour qu'il soit divisible par 6.	Si ce nombre est divisible par 6, il doit être divisible par 3 et par 2 (car $2 \times 3 = 6$) Si le nombre est divisible par 2, K doit donc être un chiffre pair. $K = 0$ ou 2 ou 4 ou 6 ou 8 Pour que ce nombre soit divisible par 3, il faut que la somme de ses chiffres soit divisible par 3. On ajoute ses chiffres : $7 + K + 2 + 1 + K = 10 + 2K$ Remplaçons K par 0, 2, 4, 6 ou 8 pour voir si on obtient un total divisible par 3 si $K = 0$: $10 + 2 \times 0 = 10$ non divisible par 3 si $K = 2$: $10 + 2 \times 2 = 14$ non divisible par 3 si $K = 4$: $10 + 2 \times 4 = 18$ divisible par 3 si $K = 6$: $10 + 2 \times 6 = 22$ non divisible par 3 si $K = 8$: $10 + 2 \times 8 = 26$ non divisible par 3 Au final, la seule solution est de remplacer K par 4 pour que le nombre soit divisible par 6. On obtient alors le nombre : 74 214

Dans une classe il y a 12 filles et 18 garçons. On veut faire des groupes de telle façon que dans chaque groupe il y ait le même nombre de garçons et le même nombre de filles. On veut que tous les élèves soient dans un groupe. Combien de groupes peut-on faire ?	Le nombre de groupes doit diviser le nombre de garçons. On cherche donc les diviseurs de 18 : 1 – 2 – 3 – 6 – 9 – 18 Le nombre de groupes doit aussi diviser le nombre de filles. On cherche donc les diviseurs de 12 : 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 12 Les diviseurs communs à 12 et 18 sont donc : 1 – 2 – 3 – 6 On peut donc faire 1, 2, 3 ou 6 groupes.
--	---

14- NOMBRES PREMIERS & APPLICATIONS

I. Les nombres premiers :

- Un nombre premier est un nombre entier supérieur à 1 et qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :

- 3 est un nombre premier car il n'est divisible que par 1 et par 3.
- 10 n'est pas un nombre premier car il est divisible aussi par 2 et par 5.
- Les premiers nombres premiers (à connaître quand même...) sont :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31

Remarques :

Il y a une infinité de nombres premiers.

Même si beaucoup le pensent, le nombre 1 n'est pas considéré comme nombre premier !

II. Première application des nombres premiers : décompositions

Les nombres premiers ont une particularité intéressante en arithmétique :

- Tout nombre entier supérieur à 1 peut s'écrire en un produit de nombres premiers.

Il existe plusieurs façons de décomposer un nombre jusqu'à n'obtenir que des nombres premiers. Par contre la solution est unique, à l'ordre près.

Exemples :

- Décomposons 84 en produit de nombres premiers :
 $84 = 2 \times 42 = 2 \times 6 \times 7 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ (*c'est fini : il n'y a que des nombres premiers !*)
ou :
 $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$
- Décomposons 45 en produit de nombres premiers :
 $45 = 5 \times 9 = 5 \times 3 \times 3$
ou :
 $45 = 3 \times 15 = 3 \times 3 \times 5$

Quelle que soit la méthode, on arrive au même résultat, seul l'ordre des nombres premiers n'est pas le même, mais cela ne change rien dans une multiplication.

Remarques :

Généralement on donne la décomposition en donnant les nombres premiers dans l'ordre croissant.

Comme on risque de trouver le même nombre premier multiplié par lui-même plusieurs fois dans la décomposition on utilisera les notations avec les puissances.

Pour trouver la décomposition d'un nombre (sans utiliser la touche de la calculatrice qui vous fait ça toute seule comme une grande...) le mieux est souvent de regarder si on peut faire apparaître un 2, un autre 2, etc. Puis un 3, un autre 3 etc. En utilisant les critères de divisibilité ça se fait tout seul... Ce n'est pas une obligation de procéder ainsi bien sûr !

Exemples :

- Donnons la décomposition de 250 en facteurs premiers :

$$\begin{aligned}250 &= 2 \times 125 \\&= 2 \times 5 \times 25 \\&= 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\&= 2 \times 5^3\end{aligned}$$

- Donnons la décomposition de 98 en facteurs premiers :

$$\begin{aligned}98 &= 2 \times 49 \\&= 2 \times 7 \times 7 \\&= 2 \times 7^2\end{aligned}$$

- Donnons la décomposition de 31 en facteurs premiers :

$$31 = 31$$

il n'y a rien à faire puisque 31 est un nombre premier !

III. Seconde application : donner l'écriture irréductible d'une fraction

- L'écriture irréductible d'une fraction est l'écriture la plus simple de cette fraction.

(C'est à dire qu'elle a été simplifiée au maximum !)

Pour trouver l'écriture irréductible d'une fraction donnée, il y a juste à décomposer son numérateur et son dénominateur en facteurs premiers. Ensuite il suffit de barrer, ou de soustraire les bonnes puissances si on utilise les notations avec les puissances, pour obtenir l'écriture irréductible.

Exemples :

- Donner l'écriture irréductible de $\frac{98}{147}$:

$$\begin{aligned}\text{On a : } 98 &= 2 \times 49 = 2 \times 7 \times 7 = 2 \times 7^2 \\ \text{et : } 147 &= 3 \times 49 = 3 \times 7 \times 7 = 3 \times 7^2\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{98}{147} = \frac{2 \times 7^2}{3 \times 7^2} = \frac{2}{3}$$

- Donner l'écriture irréductible de $\frac{375}{675}$:

$$\text{On a : } 375 = 3 \times 125 = 3 \times 5 \times 25 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^3$$

$$\text{Et : } 675 = 3 \times 225 = 3 \times 3 \times 75 = 3 \times 3 \times 3 \times 25 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$\text{D'où : } \frac{375}{675} = \frac{3 \times 5^3}{3^3 \times 5^2} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$$

Alors pour ceux qui ont du mal ici : on regarde d'abord les 3. La puissance des 3 au numérateur est 1 et la puissance des 3 au dénominateur est 3. Donc il y a plus de 3 « en bas » de la fraction, et il en restera en puissance $3 - 1 = 2$.

Pour les 5, on les a à la puissance 3 au numérateur et à la puissance 2 au dénominateur. Il y en a donc plus « en haut » et il en restera en haut $3 - 2 = 1$.

Remarque :

Vous devez être capables de dire si une fraction est déjà irréductible (c'est à dire simplifiée au maximum) sans essayer de la simplifier. Il suffit d'utiliser (souvent) les critères de divisibilité.

IV. Quelques exercices d'arithmétique :

Exercice 1 :

La fraction $\frac{9425}{11390}$ n'est pas irréductible car son numérateur et son dénominateur sont divisibles par 5, donc on peut la simplifier par 5.

La fraction $\frac{903}{111}$ n'est pas irréductible car son numérateur et son dénominateur sont divisibles par 3, donc on peut la simplifier par 3.

Je suis un nombre entier compris entre 600 et 800. Je suis pair. Je suis divisible par 11. J'ai aussi 3 et 5 comme diviseurs. Qui suis-je ?

Le nombre est pair, donc il s'écrit $2 \times \dots$

Comme il est divisible par 11, il s'écrit $11 \times \dots$

Comme il est aussi divisible par 3 et par 5, il s'écrit aussi $3 \times \dots$ et $5 \times \dots$

Donc le nombre cherché s'écrit $2 \times 11 \times 3 \times 5 \times \dots$

C'est à dire $330 \times \dots$

C'est donc un multiple de 330.

$$\text{On a } 0 \times 330 = 0 \qquad 1 \times 330 = 330$$

$$2 \times 330 = 660$$

$$3 \times 330 = 990$$

Donc le seul nombre possible est 660.

Exercice 2 :

Lors de leur entraînement d'athlétisme, Elina et Margaux travaillent leur régularité. Elles courent à vitesse constante.

Pour faire un tour :

- Elina met 144 s ; - Margaux met 160 s.

Elles partent en même temps de la ligne de départ.

Combien de tours chacune d'elles doit-elle faire pour qu'elles se retrouvent en même temps à leur position de départ ?

Comme Elina effectue un tour en 144 s, alors toutes les 144 s elle se retrouve au point de départ.

Comme Margaux effectue un tour en 160 s, alors toutes les 160 s elle se retrouve au point de départ.

Il suffit de trouver un nombre qui est multiple de 144 et de 160. On pourrait compter de 144 en 144 et de 160 en 160 jusqu'à tomber sur le même nombre mais on peut être un peu plus malin :

$$\begin{aligned}\text{On a : } 144 &= 2 \times 72 = 2 \times 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 2 \times 18 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 9 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ &= 2^4 \times 3^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et : } 160 &= 2 \times 80 = 2 \times 2 \times 40 = 2 \times 2 \times 2 \times 20 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 10 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 2^5 \times 5\end{aligned}$$

Donc pour trouver le plus petit multiple de 144 et 160 on regarde les deux décompositions et on « complète » avec ce qui manque la décomposition de l'un avec des facteurs de l'autre :

Il faut du 2^5 et du 5 pour avoir un multiple de 160

et du 2^4 (au moins) et du 3^2 pour avoir un multiple de 144.

On prend donc comme nombre :

$$2^5 \times 5 \times 3^2 = 32 \times 5 \times 9 = 1440$$

Donc au bout de 1440 secondes les deux se retrouvent au point de départ en même temps.

Exercice 3 :

Rendre irréductible la fraction $\frac{425}{100}$ puis calculer et simplifier $A = \frac{425}{100} - \frac{3}{2}$

$$\text{On a : } 425 = 5 \times 85 = 5 \times 5 \times 17 = 5^2 \times 17$$

$$\text{et : } 100 = 2 \times 50 = 2 \times 2 \times 25 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$

$$\text{D'où : } \frac{425}{100} = \frac{5^2 \times 17}{2^2 \times 5^2} = \frac{17}{2^2} = \frac{17}{4}$$

$$\text{Ensuite : } A = \frac{425}{100} - \frac{3}{2} = \frac{17}{4} - \frac{3}{2} = \frac{17}{4} - \frac{6}{4} = \frac{11}{4}$$

15- PROPORTIONNALITE

La proportionnalité intervient dans beaucoup de problèmes et peut être utilisée avec plein d'autres notions (comme les pourcentages, les histoires de vitesse de distance et de durée, etc.)

I. Proportionnalité ?

Il faut d'abord bien comprendre qu'on parle de proportionnalité entre deux grandeurs (ou plus mais on les prend quand même deux par deux pour les calculs.)

- Deux grandeurs sont proportionnelles si elles grandissent dans les mêmes proportions.

C'est pas clair ? Alors en fait voilà la seule question que vous devez vous poser savoir si deux grandeurs sont proportionnelles ou non :

« Si je double une des deux est-ce que je double l'autre ? Si je triple l'une des deux est-ce que je triple l'autre ? Si je prends la moitié de la première est-ce que je prends la moitié de l'autre ? »

Si vous répondez « oui » à chaque fois alors c'est que c'est proportionnel, sinon... ce n'est pas proportionnel !

Exemples :

- L'âge et la taille d'une personne ne sont pas proportionnels, car si on double son âge on ne double pas forcément sa taille non ?
- Le prix payé pour du carburant est proportionnel au volume de carburant acheté, car si on prend deux fois plus d'essence on paiera deux fois plus cher.
- Si une voiture roule à vitesse constante (c'est à dire à la même vitesse) alors la distance parcourue est proportionnelle au temps, car si vous roulez deux fois plus longtemps vous irez deux fois plus loin ! (Sauf si vous tombez en panne mais bon...)

II. Les tableaux de proportionnalité :

Alors un tableau de proportionnalité est un tableau qui représente une situation de proportionnalité. En général il a deux lignes et sur les deux lignes on met les deux grandeurs proportionnelles.

Dans un tableau de proportionnalité on passe d'une ligne à l'autre en multipliant (ou en divisant dans l'autre sens) par un même nombre. Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité.

Exemples :

- On achète des tomates dans un magasin :

Quantité achetée (kg)	1	2	3	4	5
Prix payé (€)	4	8	12	16	20

On est bien dans une situation de proportionnalité (deux fois plus de tomates coûtent deux fois plus cher...)

On voit que ce tableau, on passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par 4, et donc pour passer de la seconde à la première on divise par 4.

- Voici un tableau représentant la distance parcourue par un groupe de randonneurs en fonction du temps :

Durée du trajet (min)	10	20	30	40	50
Distance parcourue (km)	1	2	3	4	5

Encore une fois on voit qu'on passe de la première ligne à la seconde en multipliant par 10. Je vous laisse trouver comment on passe de la seconde à la première... Et donc on a encore une fois un tableau de proportionnalité, et donc la distance parcourue est proportionnelle au temps mis pour effectuer cette distance.

III. Résoudre des problèmes de proportionnalité :

Résoudre un problème de proportionnalité revient en fait à compléter un tableau de proportionnalité. Donc pour résoudre un problème de proportionnalité il suffit de trouver comment compléter un tel tableau (en l'ayant bien construit déjà !)

Il y a différentes façons de compléter un tel tableau :

1) Avec le coefficient de proportionnalité :

Une voiture roule à vitesse constante. En 3h elle parcourt 240 km. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 120 km ? Quelle distance effectue-t-elle en 5h ?

On construit un tableau en le complétant avec les informations de l'énoncé et en choisissant bien les unités. On ajoute aussi les colonnes permettant de répondre aux deux questions posées :

Durée (h)	3	1,5	5
Distance (km)	240	120	400

(J'ai mis les réponses en rouge dans le tableau, mais au départ ce sont elles qu'on cherche ci-dessous...)

On est dans une situation de proportionnalité car la voiture roule à vitesse constante. On voit aussi que pour passer de la première ligne à la deuxième on multiplie par 80 (on le trouve en calculant : $240 : 3 = 80$)
Dans l'autre sens on divisera donc par 80

- On calcule : $120 : 80 = 1,5$ (h)
Donc il faudra 1h30min pour parcourir 120 km ($1,5h = 1h + 0,5h$ etc.)
- On calcule : $5 \times 80 = 400$ (km)
Donc en 5 heures la voiture effectuera 400 km.

2) Avec le colonnes :

Dans certains cas, on peut compléter un tableau en utilisant les colonnes de manière astucieuse.

Par exemple on va compléter ce tableau de proportionnalité :

3,2	1,5	4,7	32
2,24	1,05	3,29	22,4

(Encore une fois j'ai mis les réponses à trouver en rouge dans ce tableau...)

- On remarque que : $3,2 + 1,5 = 4,7$
Donc on calcule : $2,24 + 1,05 = 3,29$

On peut ajouter des colonnes entre elles car si, par exemple, on connaît le prix pour 20 L de carburant et le prix pour 30 L de carburant, on trouve le prix de 50 L de carburant en ajoutant les deux prix précédents, non ?

- On remarque : $2,24 \times 10 = 22,4$
Donc on calcule : $3,2 \times 10 = 32$

On peut multiplier les deux valeurs d'une colonne par un même nombre car par exemple si on connaît le prix de 5 L de carburant, on connaît le prix de 50 L de carburant : il sera 10 fois plus élevé !

3) Avec les produits en croix :

Cette technique fonctionne tout le temps et elle est facile à utiliser. En fait il suffit de comprendre que quand on complète un tableau de proportionnalité on a toujours (au

moins) deux valeurs connues dans une colonne et une colonne avec une valeur manquante.

La méthode est simple :

On se retrouve (en gros) avec un « mini » tableau de 2 colonnes avec 3 nombres sur 4 dedans. Pour trouver la quatrième valeur, il suffit de multiplier les deux nombres connus dans la même diagonale et de diviser par la troisième valeur.

Exemple :

On considère qu'un nombre de pages est proportionnel au nombre d'heures passées à les écrire.

S'il faut 6 heures pour écrire un rapport de 33 pages, combien d'heures faut-il pour écrire un rapport de 55 pages ?

On fait un tableau (la première colonne est donnée ici juste pour expliquer comment on met les valeurs dans le tableau, mais seules les deux dernières colonnes sont importantes pour les calculs.)

Nombre d'heures	6	10
Nombre de pages	33	55

On utilise les produits en croix et on calcule :

$\frac{6 \times 55}{33} = \frac{330}{33} = 10$ *(On multiplie les deux nombres de la diagonale 6 et 55 et on divise par le troisième nombre 33.)*

Donc il faut 10 heures pour rédiger 55 pages.

(Les plus observateurs d'entre vous auront remarqué que :

$\frac{6 \times 55}{33} = \frac{3 \times 2 \times 5 \times 11}{3 \times 11} = 2 \times 5 = 10$, *et hop sans calculatrice !!!)*

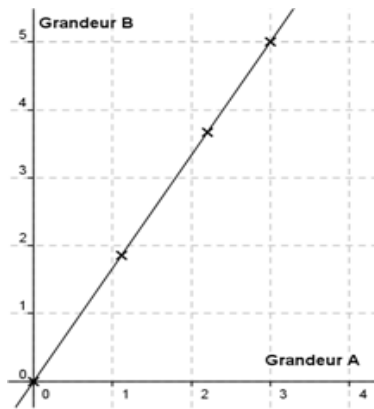
IV. Représentation graphique d'une situation de proportionnalité :

Lorsqu'on représente graphiquement une grandeur A en fonction d'une grandeur B, on se rend compte que si ces deux grandeurs sont proportionnelles alors ce graphique respecte la règle suivante :

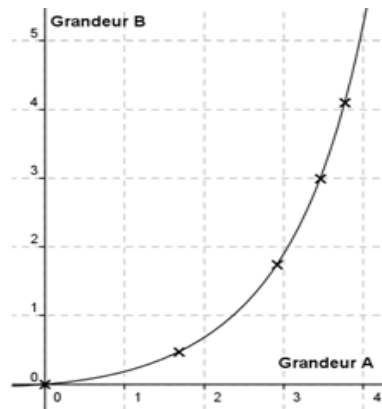
- Une situation de proportionnalité se traduit graphiquement par une droite passant par l'origine.

Autrement dit, si on vous donne un graphique et que la courbe n'est ni une droite ou est une droite ne passant par l'origine, alors vous êtes sûrs que ce n'est pas une situation de proportionnalité.

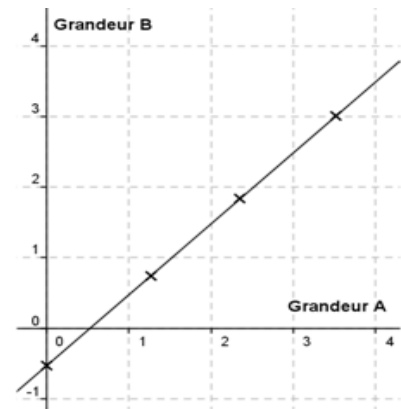
Exemple :



Situation 1



Situation 2



Situation 3

Devinez sur quel graphique la grandeur B est proportionnelle à la grandeur A ? Vous avez répondu « la situation 1 » c'est bien ! Je suis fier de vous !

Les pourcentages sont utilisés souvent dans la vie courante. Beaucoup les trouvent compliqués mais vous savez déjà tout ce qu'il faut pour les utiliser correctement. D'abord, et tout simplement, parce qu'un pourcentage n'est qu'une écriture différente d'une fraction avec 100 au dénominateur. Par exemple $15\% = \frac{15}{100}$.

Et ensuite parce que les fractions ont un rapport avec la proportionnalité que vous maîtrisez déjà comme des dieux !

I. Déterminer un pourcentage :

Comme je le disais avant, on peut déterminer (ou utiliser) des pourcentages avec un tableau de proportionnalité, même si ce n'est pas le plus rapide. Par contre il faut se rappeler qu'il n'y aura jamais dans votre tableau de ligne avec « pourcentage » ! Un pourcentage se met toujours en colonne !

Exemple :

Dans la classe de 3A il y a 28 élèves et 17 font les gros yeux quand on parle de pourcentage.

Quel est le pourcentage de ceux qui font les gros yeux ?

(La réponse à trouver est en rouge dans le tableau hein...)

On construit ce tableau avec une colonne pour trouver le pourcentage :

Nombres d'élèves aux gros yeux	17	<i>$\approx 60,7$</i>
Nombre total d'élèves	28	100

(Quand on travaille avec des pourcentages on se ramène toujours à un total de 100, d'où le 100 dans le tableau.)

On le complète avec un produit en croix :

$$\frac{17 \times 100}{28} = \frac{1700}{28} \approx 60,7$$

Donc le pourcentage d'élèves faisant les gros yeux est d'environ *60,7 %*.

Le mieux est quand même de trouver les pourcentages plus rapidement on se souvenant que quand on cherche le pourcentage de « bidules » parmi les « trucmuches » il suffit de calculer : $\frac{\text{nombre de bidules}}{\text{nombre de trucmuches}} \times 100$

Exemple :

Aux dernière élections municipales Edmond Tagnar a eu 3777 voix et 5230 personnes ont voté.

Quel est le pourcentage de voix obtenues par Edmond ?

On calcule : $\frac{\text{nombre de voix obtenues par Edmond}}{\text{nombre de votes}} \times 100$

$$\frac{3777}{5230} \times 100 \approx 72,2$$

Edmond a donc obtenu environ 72,2 % des voix.

II. Utiliser un pourcentage :

C'est l'inverse de ce qu'on a fait avant. Ici on connaît le pourcentage et il faut trouver une valeur à partir de ce pourcentage.

On pourrait passer aussi par un tableau, mais là il faut quand même que vous appreniez à utiliser directement les pourcentages sans perdre de temps à en faire un.

En plus c'est simple : vous remplacez le pourcentage par sa fraction (avec 100 au dénominateur, vous remplacez cette fraction par son écriture décimale facile à trouver en on multiplie !) Regardez ce magnifique exemple :

Exemple :

Dans un gâteau de 320 g il y a 17% de sucre.

Quelle est la quantité de sucre dans ce gâteau très léger ?

On calcule 17% de 320 g :

$$17\% \times 320 = \frac{17}{100} \times 320 = 0,17 \times 320 = 54,4 \text{ (g)}$$

Il y a donc 54,4 g de sucre dans ce gâteau.

(Franchement, c'est pas hyper simple comme ça ?)

III. Augmentations et réductions avec des pourcentages :

Dans certains problèmes vous allez avoir des augmentations ou des réductions (pour des soldes par exemple) qui utilisent des pourcentages.

On pourrait utiliser les pourcentages comme ci-dessus pour trouver de combien la valeur va augmenter ou diminuer, en n'oubliant pas de l'ajouter ou de la retirer pour avoir la bonne réponse. Mais il y a plus simple...

Voici ce qu'il faut retenir et les exemples qui suivent vous devez les mémoriser :

- Augmenter un nombre de A % revient à le multiplier par : $(1 + A\%)$
- Diminuer un nombre de A % revient à le multiplier par : $(1 - A\%)$

Exemples :

- Mon salaire de 14 250 € mensuel (je le mérite bien !) va être augmenté (je le mérite bien aussi !) de 12 %.

Quel sera mon nouveau salaire ?

Je prends mon salaire et le je le multiplie par $(1 + 12\%)$

On calcule : $14\,250 \times (1 + 12\%) = 14\,250 \times (1 + \frac{12}{100}) = 14\,250 \times (1 + 0,12)$
 $= 14\,250 \times 1,12 = 15\,960 \text{ (€)}$

Mon nouveau salaire sera donc de 15 960 €.

- Ma petite amie veut s'acheter une robe à 89 €. Heureusement elle est soldée, car je suis radin, et il y a donc une baisse de prix de 21 %.

Quel est le nouveau prix de la robe ?

Je prends le prix de la robe et je le multiplie par $(1 - 21\%)$

On calcule : $89 \times (1 - 21\%) = 89 \times (1 - 0,21) = 89 \times 0,79 = 70,31 \text{ (€)}$
La robe coûtera alors 70,31 €.

(Et je trouve que c'est quand même encore très cher non mais ho !)

Erreur à ne pas faire :

Attention, si vous diminuez quelque chose de 15% et que vous l'augmentez de 15%, vous ne retrouvez pas la valeur de départ... Souvenez-vous en et faites les calculs sur un exemple pour voir que cela ne marche pas comme ça...

I. Les principes de base :

En statistiques on relève des informations sur un certain nombre d'éléments (des personnes, etc.) et on les analyse. Généralement ces relevés sont données dans un tableau ou sur un graphique.

Par exemple ici on a demandé à 35 personnes de dire combien de films elles voyaient en un mois.

Nombre de films vus	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	5	6	5	7	3	3	2	1
Effectifs cumulés croissants	3	8	14	19	26	29	32	34	35

La ligne des effectifs indiquent combien de personnes ont vu 0 film, 1 film, etc.

La ligne des effectifs cumulés croissants (utiles pour beaucoup de choses en statistiques) permet de voir combien de personnes ont vu un seul film, un ou deux films, un, deux ou trois films etc. Elle se complète en ajoutant (colonne par colonne) de la gauche vers la droite les effectifs de la seconde ligne.

Dans cet exemple on voit, entre autres, que :

- 7 personnes ont vu 4 films
- 19 personnes ont vu jusqu'à 3 films.
- Le nombre total de personnes interrogées est de 35 (c'est le dernier nombre de la ligne des effectifs cumulés croissants.) On l'appelle l'effectif total.

Remarque :

On peut aussi donner la ligne des effectifs cumulés décroissants au lieu des croissants. Dans ce cas on ajoute les effectifs dans l'ordre décroissant.

II. Pourcentages et fréquences :

Lorsqu'on dispose d'une série statistique (dans un tableau ou non), on peut vous demander de répondre à certaines questions en pourcentage ou en fréquence.

Pour les pourcentages vous savez répondre si vous avez revu la partie sur les pourcentages.

Quand on calcule un pourcentage on écrit « X 100 » dans le calcul.

Pour une fréquence, on fait comme pour le calcul d'un pourcentage mais on ne multiplie pas par 100, c'est la seule différence.

Exemple :

Si on reprend le tableau précédent et qu'on cherche le pourcentage de personnes ayant vu 5 films, on calcule :

$$\frac{3}{35} \times 100 = \frac{3 \times 100}{35} \approx 8,57 \text{ (3 personnes sur 35 ont vu 5 films...)}$$

Il y a donc environ 8,57% des personnes interrogées qui ont vu 5 films.

Si on vous demande la fréquence de ceux qui ont vu 5 films, on calcule par contre :

$$\frac{3}{35} \approx 0,86$$

La fréquence de ceux qui ont vu 5 films est donc d'environ 0,86.

Remarques :

- Un pourcentage (dans ce genre de situation) est forcément compris entre 0% et 100%. Une fréquence, elle, est comprise entre 0 et 1.
- On peut donc vous demander de compléter une ligne avec les pourcentages ou les fréquences. Vous faites comme au-dessus colonne par colonne pour compléter.
- On peut aussi vous demander une ligne des « fréquences cumulées croissantes » ou des « pourcentages cumulés croissants ». Vous faites comme au-dessus pour chaque colonne mais au lieu de prendre les effectifs pour les calculs vous prenez les effectifs cumulés croissants. Je vous montrerai un tableau complété à la fin pour revoir ça.

III. L'étendue :

Alors là, c'est tellement simple que ça va tenir en deux lignes... Et pourtant il y a toujours plein d'élèves qui se trompent.

- L'étendue d'une série statistiques est la différence entre la plus grande valeur de la série et la plus petite.

Exemples :

- Si on reprend le tableau avec le nombre de films vus, le plus grand nombre de films vus par les personnes interrogées est 8 et le plus petit nombre est 0. Donc :
étendue = $8 - 0 = 8$
- Si on prend, par exemple, comme série de notes : 9 – 4 – 17 – 15 – 8 – 10
alors on a : étendue = $17 - 4 = 13$
Beaucoup se trompent et répondent : étendue = 1

(et oui... il faut bien trouver la plus grande valeur et la plus petite, car elles ne sont pas forcément données dans l'ordre.)

- En statistiques on dit que l'étendue est une caractéristique de dispersion... Cela veut simplement dire que plus l'étendue est grande plus les valeurs sont diverses. Par exemple une étendue de 3 sur des relevés de notes signifie que les notes sont pour tous les élèves quasi équivalentes... Si l'étendue est grande on dit que la série a une grande dispersion...

IV. Utilisation des « classes » en statistiques :

Lorsqu'on relève des données qui peuvent être variées, il serait compliqué de faire un tableau avec une colonne par valeur relevée car il y aurait certainement autant de colonnes que de valeurs.

Dans ce cas particulier on va utiliser ce qu'on appelle des classes.

Exemple :

On a interrogé des personnes à la sortie d'une station essence. On leur a demandé la quantité de carburant qu'ils ont pris. On a dressé ce tableau :

Volume (L)	[10 ;15 [	[15 ;20[	[20 ;25[	[25 ;30[	[30 ;35[	[35 ;40[	[40 ;45[	[45 ;50[
Effectif	8	13	27	20	25	12	33	10
Valeur centrale	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5

Dans la première colonne, on a comptabilisé les volumes de carburant compris entre 10 litres et 15 litres exclus.

Cela signifie qu'une personne qui a pris 10 L est comptée dans cette colonne. Une personne qui prend 11,32 L aussi. Par contre une personne ayant pris 15 L est comptée dans la colonne suivante.

[10 ; 15 [est appelée une classe. On voit qu'entre 10 et 15 il y a une différence de 5. On dit que cette classe a une amplitude de 5.

Et on remarque que toutes les classes du tableau ont la même amplitude. C'est normal, c'est une obligation ! On ne peut pas avoir comme classes, par exemple : [5 ; 15 [puis [15 ; 78[puis [78 ; 79 [...

Pour la ligne « valeurs centrales » on a placé pour chaque colonne la valeur... centrale (lol) de chaque classe. C'est la valeur qui est « pile poil » entre les deux bornes de la classe.

A quoi elle sert ? Vous verrez qu'elle sert à calculer la moyenne...

Remarque :

Lorsqu'on a un tableau avec des classes, on ne dispose pas des informations exactes. On sait par exemple que 8 personnes ont pris entre 10 et 15 L de carburant. Mais elles peuvent très bien avoir toutes pris 10 L ou bien 14 L, on en sait rien.

Plus l'amplitude de la classe est petite et plus on aura des résultats précis, mais plus on aura de colonnes...

On verra que dans ce cas là la moyenne qu'on calculera ne sera pas la moyenne exacte...

V. Les médianes :

Je vous redonne la définition mais l'important est de comprendre la méthode pour la trouver et, aussi, à quoi elle sert :

- On appelle médiane d'une série statistique une valeur m telle qu'il y ait autant de valeurs supérieures ou égales à m que de valeurs inférieures ou égales à m .

On zappe la définition mais on retient quand même qu'une médiane n'est pas forcément une valeur de la série... Et qu'il n'y a pas forcément une seule réponse possible... Voici la méthode qu'il faut connaître pour déterminer une médiane :

Méthode pour trouver la médiane :

On prend le nombre de valeurs de la série (attention : pas seulement le nombre de valeurs différentes mais le nombre TOTAL de valeurs en comptant les répétitions !)

On divise ce nombre par deux.

Alors :

- si on trouve comme résultat un nombre entier A , alors on peut prendre comme médiane tout nombre compris entre la A ème valeur et la suivante.
- si on trouve comme résultat un nombre A qui s'écrit $...,5$, alors pour trouver la médiane on prend celle qui est située au rang entier suivant A .

Exemples : *(peu importe la série, je vous mets un exemple avec un nombre pair de valeurs et un avec un nombre impair c'est tout...)*

- On a 300 valeurs dans la série.
 $300 : 2 = 150$
Donc on peut prendre comme médiane toute valeur comprise entre la 300^e valeur de la série et la 301^e.
- On a 77 valeurs dans la série.
 $77 : 2 = 38,5$
Donc la médiane est la 39^e valeur de la série.

Il n'y a plus qu'à trouver une valeur correspondant à ce que vous venez d'écrire, en la trouvant, souvent, à l'aide des effectifs cumulés croissants...

Exemples :

On reprend la tableau du début avec le nombre de films vus.

On va chercher le nombre de films médian.

Il y a 35 valeurs dans la série. (*car on a interrogé 35 personnes...*)

$$35 : 2 = 17,5$$

Donc la médiane est la 18^o valeur de la série.

Alors on regarde la ligne des effectifs cumulés croissants et on cherche dans quelle colonne apparaîtra la 18^o valeur de la série... Dans ma grande bonté je vous remets le tableau...

Nombre de films vus	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	5	6	5	7	3	3	2	1
Effectifs cumulés croissants	3	8	14	19	26	29	32	34	35



Dans cette colonne il y a de la 15^o à la 19^o valeur. Donc la médiane est ici !

On trouve donc : médiane = 3

Ca signifie quoi ?

Comme la médiane est 3 cela signifie qu'on peut faire (environ) deux groupes de même effectif en mettant dans le premier ceux qui ont vu au plus 3 films et dans l'autre ceux qui ont vu au moins 3 films.

Autrement dit il y a autant de personnes qui ont vu au moins 3 films que de personnes qui ont vu au plus 3 films...

VI. Les moyennes :

Alors les moyennes, tout le monde connaît et pourtant beaucoup se trompent !

Pour calculer une moyenne il faut tenir compte du nombre de fois où les valeurs apparaissent (ou des coefficients, par exemple pour des notes) et diviser par le nombre total de valeurs en comptant les répétitions (ou les coefficients.)

Exemples :

- On reprend l'exemple avec le nombre de films vus. On va calculer le nombre moyen de films vus.

$$\text{Moyenne} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 2 + 8 \times 1}{35}$$

$$= \frac{115}{35}$$

$$\approx 3,3$$

Les personnes interrogées ont donc vu en moyenne environ 3,3 films par mois.
Cela signifie que si chaque personne avait vu 3,3 films, on arriverait au même total de films vus en tout.

- On reprend l'exemple avec les classes :

(Je vous remets le tableau...)

Volume (L)	[10 ;15 [	[15 ;20[	[20 ;25[	[25 ;30[	[30 ;35[	[35 ;40[	[40 ;45[	[45 ;50[
Effectif	8	13	27	20	25	12	33	10
Valeur centrale	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5

Alors ici pour calculer le volume de carburant moyen pris par les personnes interrogées, il faut utiliser la valeur centrale car on ne connaît pas, je vous le rappelle, les valeurs exactes correspondant à chaque client.

On calcule donc :

Moyenne =

$$\frac{8 \times 12,5 + 13 \times 17,5 + 27 \times 22,5 + 20 \times 27,5 + 25 \times 32,5 + 12 \times 37,5 + 33 \times 42,5 + 10 \times 47,5}{148}$$

(148 est l'effectif total obtenu en ajoutant les effectifs...)

$$= \frac{4625}{148}$$

$$= 31,25$$

Le volume moyen pris par les clients de la station est de 31,25 L.

Et si on cherchait une médiane (pour vous montrer comment on fait avec des classes) :

Il y a 148 valeurs dans la série.

$$148 : 2 = 79$$

donc on peut prendre comme médiane tout nombre compris entre la 79^e valeur de la série et la 80^e.

(On peut rajouter la ligne des effectifs cumulés croissants ou le faire de tête pour trouver où se trouve la 79^e et la 80^e valeur de la série...)

C'est dans la classe [30 ;35 [que se trouve la médiane (cette classe contient de la 69^e valeur à la 93^e valeur... cherchez vous verrez...)

On ne peut pas être plus précis ici et on doit juste dire dans quelle classe elle se situe...

- Un exemple de moyenne avec des notes et des coefficients :
On a eu comme note 9 coefficient 2 ; 14 coefficient 1 et 8 coefficient 3.
Quelle est notre moyenne actuellement ?

$$\begin{aligned}\text{Moyenne} &= \frac{9 \times 2 + 14 \times 1 + 8 \times 3}{6} \\ &= \frac{56}{6} \\ &\approx 9,3\end{aligned}$$

On a une moyenne d'environ 9,3 actuellement.

(Pour ceux qui se posent la question, 6 est obtenu en ajoutant les coefficients des 3 notes, car une note coefficient 3 compte comme 3 notes, etc.)

- Un exemple avec des fréquences :
Imaginons qu'on ait le tableau suivant :

Valeurs	14	20	25
Fréquences	0,2	0,5	0,3

(Remarquons que la somme des fréquences est égale à 1, ce qui est normal ; en pourcentage la somme doit être égale à 100%...)

Ici on ne connaît pas les effectifs, mais la moyenne se calcule quand même très facilement en faisant ainsi :

$$\begin{aligned}\text{Moyenne} &= 14 \times 0,2 + 20 \times 0,5 + 25 \times 0,3 \\ &= 20,3\end{aligned}$$

On trouve une moyenne de 20,3 en ajoutant les produits des valeurs par leurs fréquences... A retenir...

VII. Un tableau complet et des conseils :

- Les statistiques ne sont pas la partie la plus dure du programme mais on y voit trop souvent des élèves patauger dans la semoule. Il n'y a pas beaucoup à connaître, c'est juste du calcul et un peu de rédaction. Alors n'abandonnez pas devant un tel exercice parce que le trop plein d'informations vous piquera les yeux. Essayez, vous y gagnerez des points croyez-moi...
- La calculatrice est essentielle en statistiques, mais, par pitié, essayez de refaire au moins deux fois un calcul de moyenne pour être sûr d'avoir le bon résultat ! Et faites attention aux parenthèses si vous voulez diviser une somme avant... Vous vous éviterez de perdre des points bêtement...

A la suite un tableau complet avec tout ce que je vous ai expliqués avant, sauf pour la valeur centrale qui ne peut être utilisée que pour des tableaux avec des classes :

Voici comment se répartissent 20 musiciens d'une chorale suivant leur âge :

Age	13	14	15	16	17
Effectifs	2	4	6	5	3
Effectifs cumulés croissants	2	6	12	17	20
Effectifs cumulés décroissants	20	18	14	8	3
Fréquences	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{6}{20} = 0,3$	$\frac{5}{20} = 0,25$	$\frac{3}{20} = 0,15$
Fréquences cumulées croissantes	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{6}{20} = 0,3$	$\frac{12}{20} = 0,6$	$\frac{17}{20} = 0,85$	$\frac{20}{20} = 1$
Pourcentages	$\frac{2}{20} \times 100 = 10$	20	30	25	15

18- EXPRESSIONS LITTERALES

(Dans ce chapitre, notez que x est une petite lettre x , et que X est le signe multiplié...)

I. Expressions littérales ? ? ?

- Une expression littérale est une expression qui peut comporter des lettres et/ou des nombres.

Par exemple :

$$4x - 9y + 3$$

$$65ab + b - a$$

$$4(x - 2) - 3(x + x^2)$$

sont des expressions littérales.

Remarques :

- Les lettres utilisées remplacent des nombres.
- Dans une expression littérale, le signe multiplié X n'est pas obligatoire entre un nombre et une lettre, entre deux lettres, entre une lettre et une parenthèse ouverte, entre un nombre et une parenthèse ouverte ou entre une parenthèse fermée et une parenthèse ouverte.

Exemples :

$4 X t$ s'écrit plus simplement $4t$

$3 X (2 + y)$ s'écrit plus simplement $3(2 + y)$

$(2x - 5) X (3 + x)$ s'écrit plus simplement $(2x - 5)(3 + x)$

Attention !

Si on écrit plus simple $y X 5$ on écrira $5y$ et pas $y5$... Pour ne pas confondre, surtout si on a tendance à écrire mal, avec y^5 .

De même $(6 - x) X 2$ s'écrira $2(6 - x)$ plutôt que $(6 - x)2$

Remarques :

Les expressions littérales sont utilisées principalement dans l'obtention de formules et de résolution de problèmes avec équations ou inéquations.

Lorsqu'on utilise une expression littérale dans une formule, il sera souvent demandé de remplacer la (ou les) lettre(s) (appelées variables) par les valeurs données.

Exemples :

- On rappelle que la vitesse est donnée par la formule $\frac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

Calculer la vitesse moyenne d'une voiture parcourant 300 km en 3h30min :

On a déjà : 3h30min = 3,5 h (*voir la partie sur les unités de temps si besoin*)

D'où :

$$\text{vitesse} = \frac{300}{3,5} \approx \mathbf{85,7 \text{ (km/h)}}$$

- Soit l'expression $A = 2x^2 - 3x + 1$.

Calculer A pour $x = \frac{1}{3}$ et $x = -2$:

- Si $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{3} + 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{9} - 1 + 1 \\ &= \mathbf{\frac{2}{9}} \end{aligned}$$

- Si $x = -2$:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 \\ &= 2 \times 4 + 6 + 1 \\ &= 8 + 6 + 1 \\ &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

II. Réduction d'une somme :

- On peut réduire une somme en regroupant les termes de la même nature (les x avec les x, les y avec les y, les nombres seuls avec les nombres seuls, etc.)

Remarque :

On reverra que cela vient de ce qui s'appelle la distributivité...

Par exemple :

$$4x + 5x = 9x$$

$$18y - y = 17y \quad (\textit{y tout seul est pareil que 1y})$$

$$a - 9a - 3a = -12a$$

Pour la première il suffit de se dire que c'est pareil que 4 € + 5 €, et cela fait bien un total de 9 € non ?

Pour la seconde c'est comme si on devait calculer 18 € - 1 €...

- Quand on regroupe des termes ensemble, on ne doit pas regrouper des termes de nature différentes (on ajoute des euros avec des euros et pas des dollars avec des dollars !)

Par exemple :

$$5x + 2y + 6x + y = 11x + 3y$$

$$6x^2 - x + 2x^2 = 8x^2 - x$$

(du x^2 et du x ne sont pas de la même nature)

$$6ab - 2ba = 4ab$$

(ab ou ba c'est pareil car $ab = a \times b = b \times a$)

$$5t - 3 + 7t - 1 = 12t - 4$$

Pour la première c'est comme si on devait calculer 5€ + 2\$ + 6€ + 1\$

Remarque :

Dans une somme, s'il y a un + ou un - devant une expression entre parenthèse, il faut savoir se débarrasser des parenthèses en se rappelant de ces deux règles :

- S'il y a un + devant une expression entre parenthèses, on peut retirer les parenthèses et le signe + en recopiant chaque terme.

Par exemple :

$$4x + (6 - 3x) = 4x + 6 - 3x$$

$$150 + (-7 + 2x) = 150 - 7 + 2x$$

- S'il y a un - devant une expression entre parenthèses, on peut retirer les parenthèses mais dans ce cas on doit changer le signe de chaque terme à l'intérieur des parenthèses.

Par exemple :

$$-3x - (5 - 2x) = -3x - 5 + 2x$$

$$17 - (-6x + 1) = 17 + 6x - 1$$

Attention !

Si on peut réduire l'expression entre parenthèses il faut penser à le faire avant d'utiliser les règles précédentes, cela permet d'éviter les erreurs.

Par exemple :

$$4x + (6x - 2 + 3x) = 4x + (9x - 2) = 4x + 9x - 2$$

$$-5 - (-3 + 2x - 5 - 4x) = -5 - (-8 - 2x) = -5 + 8 + 2x$$

III. Simplifications de produits :

On doit être capable de simplifier l'écriture d'un produit de plusieurs facteurs. Il suffit de se rappeler que dans un produit on peut changer l'ordre des facteurs, de se rappeler des formules des puissances avec les formules vues en cours et de bien se rappeler qu'entre deux lettres, ou entre un nombre et une lettre (avec le nombre placé devant) ou entre un nombre (ou une lettre) et une parenthèse ouverte il y a, sous-entendu, un signe de multiplication.

(En gros, on multiplie les nombres entre eux et on utilise les règles sur les puissances pour multiplier des lettres identiques entre elles...)

Exemples :

On va simplifier l'écriture de ces produits :

1) $4y \times 8 = 8 \times 4 \times y = 32y$

2) $5t \times 6t = 5 \times 6 \times t \times t = 30 \times t^2 = 30t^2$

3) $y^3 \times 2y = 2 \times y^3 \times y = 2 \times y^{3+1} = 2y^4$

4) $-3a \times (-2b) = -3 \times (-2) \times a \times b = 6 \times a \times b = 6ab$

5) $7yt \times 3t^5 = 7 \times 3 \times y \times t \times t^5 = 21 \times y \times t^{1+5} = 21yt^6$

6) $\frac{x^3}{9} \times \frac{27}{4}x^2 = \frac{27}{9 \times 4} \times x^3 \times x^2 = \frac{9 \times 3}{9 \times 4} \times x^{3+2} = \frac{3}{4}x^5$

Remarque :

Les règles pour simplifier les sommes et les produits vont vous permettre, en partie, de simplifier pas mal l'écriture d'une expression littérale.

Exemple :

Soit l'expression $A = 5a \times 3 - 7 \times 2a + a \times 2a - 3a^2$

On a :

$$\begin{aligned} A &= 15a - 14a + 2a^2 - 3a^2 \\ &= 1a - 1a^2 \\ &= a - a^2 \end{aligned}$$

(On a simplifié chaque produit)

(On a regroupé les a avec les a et les a^2 avec les a^2)

(On a juste retiré les 1 qui ne servaient à rien ici...)

IV. Sommes et produits :

Une dernière petite chose ici qui sera utile pour la suite pour ce qu'on appelle les factorisations et les développements d'expressions littérales...

- Une expression littérale est appelée somme si la dernière opération à effectuer est une addition (ou une soustraction.)
- Une expression littérale est appelée produit si la dernière expression à effectuer est une multiplication.

(Je vous rappelle que les multiplications et divisions sont prioritaires sur les additions et les soustractions, et que les calculs entre parenthèses sont à effectuer en premier. Il suffit donc de s'imaginer que la lettre dans l'expression est un nombre et de regarder quelle serait la dernière opération à effectuer dans l'ordre en respectant les règles de priorité.)

Exemples :

- 1) $4(x + 3) - 17$ est une somme (soustraction en dernier)
- 2) $(x - 2)(3x + 4)$ est un produit (multiplication entre les parenthèses en dernier.)
- 3) $4(2x + 3) + 2x$ est une somme
- 4) $9y(3y - 5 + y^2)$ est un produit

V. Quelques petits exercices...

Exercice 1 :

Dire si les expressions suivantes sont des sommes ou des produits :

- a) $3a + 5$
- b) $5 + 8a$
- c) $3x(2x + 5)$
- d) $(4x - 3)(6x + 5)$
- e) $(4x + 3)^2$
- f) $25x^2 - 36$
- g) $2(3x - 2) + 4(5x + 3)$

Solution :

- | | | | |
|---|----------|------------|------------|
| a) Somme | b) Somme | c) Produit | d) Produit |
| e) Produit (c'est $(4x + 3)$ fois lui-même !) | | | f) Somme |
| g) Somme | | | |

Exercice 2 :

Réduire et simplifier si possible les expressions suivantes :

$$A = 5x + 3x$$

$$B = 5 + 3x$$

$$C = 5x \times 3x$$

$$D = 5 \times 3x$$

$$E = -5x^2 + 3x^2$$

$$F = 5x + 3x^2$$

$$G = 5x \times 3x^2$$

$$H = 5x^2 \times 3x^2$$

$$I = 5x^2 - 3 + 3x - 2x^2 + 7x + 9$$

$$J = -3x^2 + 8x^2 - 4x + 9 + 3x - 7$$

Solution :

$$A = 8x$$

$$B = 5 + 3x \text{ (ne se simplifie donc pas !)}$$

$$C = 15x^2$$

$$D = 15x$$

$$E = -2x^2$$

$$F = 5x + 3x^2 \text{ (ne se simplifie donc pas !)}$$

$$G = 15x^3$$

$$H = 15x^4$$

$$I = 3x^2 + 4x + 6$$

$$J = 5x^2 - x + 2$$

Exercice 3 :

Soient les deux expressions : $A = 3x^2 - 2x + 4$

$$B = 13x - 14$$

- 1) Pour $x=2$ calculer en détaillant A et B
- 2) Pour $x=3$ calculer en détaillant A et B
- 3) A-t-on $A = B$ quelle que soit la valeur de x ?

Solution :

$$1) A = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 4 = 3 \times 4 - 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$$

$$B = 13 \times 2 - 14 = 26 - 14 = 14$$

$$2) A = 3 \times 3^2 - 2 \times 3 + 4 = 3 \times 9 - 6 + 4 = 27 - 2 = 25$$

$$B = 13 \times 3 - 14 = 39 - 14 = 25$$

- 3) Non car si on remplace, par exemple, x par 0 dans A on trouve

$$A = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 4 = 4$$

et si on remplace x par 0 dans B on trouve

$$B = 13 \times 0 - 14 = -14$$

Donc il existe (au moins) une valeur x pour laquelle les deux expressions A et B ne donnent pas le même résultat.

Remarque :

Pour montrer, au cas où, que deux expressions sont identiques, on ne pourra pas se contenter d'exemples qui montrent que cela marche pour quelques valeurs...

Exercice 4 :

Réduire ces expressions en retirant les parenthèses :

$$A = (4x - 1) + (-2x + 3)$$

$$B = -15x - (4x - 2)$$

$$C = 10 - (-2 + 5x) + (-x + 4)$$

$$D = 4x - (18x - (5x - 1))$$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= (4x - 1) + (-2x + 3) \\ &= 4x - 1 - 2x + 3 \\ &= \mathbf{2x + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -15x - (4x - 2) \\ &= -15x - 4x + 2 \\ &= \mathbf{-19x + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 10 - (-2 + 5x) + (-x + 4) \\ &= 10 + 2 - 5x - x + 4 \\ &= \mathbf{-6x + 16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 4x - (18x - (5x - 1)) \\ &= 4x - (18x - 5x + 1) \\ &= 4x - (13x + 1) \\ &= 4x - 13 - 1 \\ &= \mathbf{-9x - 1} \end{aligned}$$

19- FACTORISATIONS & DEVELOPPEMENTS

I. Définitions :

Deux définitions que nous allons utiliser et illustrer dans la suite de cette partie et qui utilisent des noms vus dans la partie précédente.

- Quand on transforme un produit en une somme, on dit qu'on a développé ou qu'on a effectué un développement.
- Quand on transforme une somme en un produit, on dit qu'on a factorisé ou qu'on a effectué une factorisation.

Remarque :

Pour développer ou réduire une expression, il existe cinq formules. Nous allons en voir deux dans ce chapitre. Les trois autres, appelées identités remarquables, seront vues au prochain chapitre.

II. La distributivité :

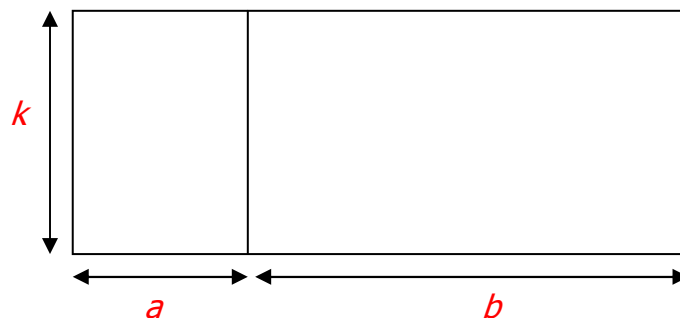
- Quels que soient K , A et B on a :
$$K(A + B) = KA + KB$$

(et aussi : $K(A - B) = KA - KB$)

D'où vient cette formule ? Il y a deux façons simples de comprendre son origine.

1^o méthode :

On considère ce rectangle qui est partagé en deux autres rectangles :



Si on veut déterminer l'aire du grand rectangle on peut procéder de deux façons différentes : soit on calcule l'aire du grand rectangle directement, soit on ajoute les aires des deux rectangles qui le partagent.

Dans le premier cas l'aire est obtenue en faisant $k \times (a + b)$ (puisque k est la largeur du rectangle et $a + b$ est la longueur de ce grand rectangle.)

Dans le second cas l'aire est obtenue en faisant $k \times a + k \times b$ (puisque $k \times a$ nous donne l'aire du rectangle de gauche et $k \times b$ l'aire du rectangle de droite.)

Comme, au final, cela nous permet d'obtenir de deux façons différentes l'aire du grand rectangle on trouve bien que :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

2° méthode :

Si on vous donne 17 pièces de 2 € et qu'après on vous donne 5 pièces de 2 € vous aurez au final $17 \times 2 + 5 \times 2$ € (en ajoutant ce que vous aviez au départ à ce que vous obtenez ensuite), ou $(17 + 5) \times 2$ (puisque vous aurez en tout $17 + 5$ pièces de 2 €.)

On retrouve donc que : $17 \times 2 + 5 \times 2 = (17 + 5) \times 2$

Remarques :

- Dans la formule donnée il faut tenir compte du signe de K , A et B pour avoir les bons signes (car K , A et B peuvent être positifs ou négatifs.)
- L'expression $K(A+B)$ est un produit et l'expression $KA + KB$ est une somme.

Quand on utilise la formule de la gauche vers la droite :

$$K(A + B) = KA + KB$$

on a vu qu'on dit qu'on développe l'expression (on transforme un produit en somme)

Quand on utilise la formule de la droite vers la gauche :

$$KA + KB = K(A + B)$$

on a vu qu'on dit qu'on factorise l'expression (on transforme une somme en produit)

Exemples :

Développer et réduire ces expressions :

$$\begin{aligned} A &= 4(5x + 3) \\ &= 4 \times 5x + 4 \times 3 \\ &= 20x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 3y(2y - 1) \\ &= 3y \times 2y + 3y \times (-1) \\ &= 6y^2 - 3y \end{aligned}$$

Il est plus pratique de trouver le signe de chaque produit pour éviter les erreurs de signe ou de recopiage d'une ligne à l'autre. Si on refait le B avec cette méthode cela donne :

$$\begin{aligned} B &= 3y(2y - 1) \\ &= 3y \times 2y - 3y \times 1 \text{ car } 3y \text{ est } 2y \text{ sont positifs donc leur produit est positif, et } 3y \text{ et } -1 \text{ sont de signes contraires donc leur produit est négatif} \\ &= 6y^2 - 3y \end{aligned}$$

En faisant de même avec l'expression suivante :

$$\begin{aligned} C &= -6y(-3 + 2y) \\ &= 6y \times 3 - 6y \times 2y \\ &= 18y - 12y^2 \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la distributivité avec plus de deux termes à l'intérieur des parenthèses :

$$\begin{aligned} D &= -4(-6x^2 + 3x - 1) \\ &= 4 \times 6x^2 - 4 \times 3x + 4 \times 1 \\ &= 24x^2 - 12x + 4 \end{aligned}$$

Il se peut que dans une expression littérale il y ait à utiliser plusieurs fois la distributivité : il suffit de développer les différentes parties (en faisant attention aux signes des produits) puis de les regrouper :

$$\begin{aligned} E &= -3(2x - 5) + 6(-4x + 1) \\ &= -3 \times 2x + 3 \times 5 - 6 \times 4x + 6 \times 1 \\ &= -6x + 15 - 24x + 6 \\ &= -30x + 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 4(x - 2) - 5x(3 - 3x) \\ &= 4 \times x - 4 \times 2 - 5x \times 3 + 5x \times 3x \\ &= 4x - 8 - 15x + 15x^2 \\ &= 15x^2 - 11x - 8 \end{aligned}$$

Remarque :

Dans une expression littérale on essaie de donner l'écriture dans l'ordre décroissant des puissances de la lettre : d'abord les x^2 puis les x puis les nombres tous seuls. C'est plus simple pour faire certaines choses avec les expressions.

Exercice 1 :

Développer et réduire ces expressions à l'aide de la distributivité :

$$A = 7(3x + 2)$$

$$B = (4y - 3) \times 2$$

$$C = -2y(-y + 3)$$

$$D = -4(y^2 - 5y)$$

$$E = 3y(-7y + 2 - 5y^2)$$

Solution :

$$\begin{aligned}A &= 7(3x + 2) \\&= 7 \times 3x + 7 \times 2 \\&= \mathbf{21x + 14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= (4y - 3) \times 2 \\&= 4y \times 2 - 3 \times 2 \\&= \mathbf{8y - 6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= -2y(-y + 3) \\&= 2y \times y - 2y \times 3 \\&= \mathbf{2y^2 - 6y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= -4(y^2 - 5y) \\&= -4 \times y^2 + 4 \times 5y \\&= \mathbf{-4y^2 + 20y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= 3y(-7y + 2 - 5y^2) \\&= -3y \times 7y + 3y \times 2 - 3y \times 5y^2 \\&= -21y^2 + 6y - 15y^3 \\&= \mathbf{-15y^3 - 21y^2 + 6y}\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Développer et réduire ces expressions :

$$A = 5(-2x + 1) + 7(x - 5)$$

$$B = 4x(-3 - 4x) - 5(2x - 6)$$

$$C = 9x - 5 - (6x^2 - 3x + 1) - 3(-x^2 + 2)$$

Solution :

$$\begin{aligned}A &= 5(-2x + 1) + 7(x - 5) \\&= -5 \times 2x + 5 \times 1 + 7 \times x - 7 \times 5 \\&= -10x + 5 + 7x - 35 \\&= \mathbf{-3x - 30}\end{aligned}$$

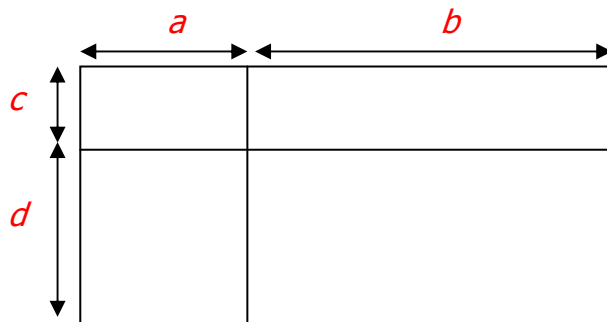
$$\begin{aligned}B &= 4x(-3 - 4x) - 5(2x - 6) \\&= -4x \times 3 - 4x \times 4x - 5 \times 2x + 5 \times 6 \\&= -12x - 16x^2 - 10x + 30 \\&= \mathbf{-16x^2 - 22x + 30}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 9x - 5 - (6x^2 - 3x + 1) - 3(-x^2 + 2) \\&= 9x - 5 - 6x^2 + 3x - 1 + 3 \times x^2 - 3 \times 2 \\&= -6x^2 + 12x - 6 + 3x^2 - 6 \\&= \mathbf{-3x^2 + 12x - 12}\end{aligned}$$

III. La double distributivité :

- Quels que soient a , b , c et d on a :
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Je vous rappelle d'où vient cette formule et pourquoi elle est vraie :



On peut calculer l'aire du grand rectangle ci-dessus de 2 façons :

On calcule directement son aire : longueur $\times$ largeur = $(a + b)(c + d)$

Ou on ajoute les aires des 4 petits rectangles intérieurs :

$$a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Et on obtient donc que : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Il est facile de retenir la formule ainsi :

- on distribue le premier terme de la première série de parenthèses avec chaque terme de la seconde série de parenthèses*
- on fait pareil avec le deuxième terme de la première série de parenthèses*

Remarques :

- La formule donnée n'utilise que des $+$ mais comme on travaille avec des nombres ou expressions a , b , c et d qui peuvent être positifs ou négatifs, il faudra faire attention aux signes (comme pour la distributivité...)
- Lorsqu'on utilise cette formule de la gauche vers la droite on rappelle qu'on dit qu'on développe l'expression (on transforme un produit en somme.)

Exemples :

Développer et réduire ces expressions :

$$\begin{aligned} A &= (3x + 5)(2 + x) \\ &= 3x \times 2 + 3x \times x + 5 \times 2 + 5 \times x \\ &= 6x + 3x^2 + 10 + 5x \\ &= 3x^2 + 11x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-2x + 1)(4x - 6) \\ &= -2x \times 4x + 2x \times 6 + 1 \times 4x - 1 \times 6 \\ &= -8x^2 + 12x + 4x - 6 \\ &= -8x^2 + 16x - 6 \end{aligned}$$

Remarque :

On peut être amené à utiliser dans une expression plusieurs fois la double distributivité et/ou la distributivité. Dans ce cas il faut faire attention aux signes dans certains cas...

Exemples :

1) Développer et réduire $A = (2x + 1)(x - 1) + (3x + 2)(x - 3)$

Ici on a à utiliser la double distributivité deux fois... Lors qu'il y un + devant une expression utilisant la double distributivité (ou pas de signe) il suffit de développer sans se poser de questions comme dans les exemples précédents :

$$\begin{aligned} A &= (2x + 1)(x - 1) + (3x + 2)(x - 3) \\ &= 2x \times x - 2x \times 1 + 1 \times x - 1 \times 1 + 3x \times x - 3x \times 3 + 2 \times x - 2 \times 3 \\ &= 2x^2 - 2x + x - 1 + 3x^2 - 9x + 2x - 6 \\ &= 5x^2 - 8x - 7 \end{aligned}$$

2) Développer et réduire $B = 4x(2x - 3) - (x - 2)(2x - 5)$

Ici on a à utiliser la distributivité une fois et la double distributivité une fois... Par contre on constate qu'il y a un - devant la partie utilisant la double distributivité... Dans ce cas, pour ne pas se tromper avec les signes, il faut mettre cette partie entre crochets, développer à l'intérieur puis regrouper et enfin se débarrasser des crochets en prenant soin de changer le signe des termes à l'intérieur, car il y a un - devant...

$$\begin{aligned} B &= 4x(2x - 3) - [(x - 2)(2x - 5)] \\ &= 4x \times 2x - 4x \times 3 - [x \times 2x - x \times 5 - 2 \times 2x + 2 \times 5] \\ &= 8x^2 - 12x - [2x^2 - 5x - 4x + 10] \\ &= 8x^2 - 12x - [2x^2 - 9x + 10] \\ &= 8x^2 - 12x - 2x^2 + 9x - 10 \\ &= 6x^2 - 3x - 10 \end{aligned}$$

Exercice 1 :

Développer et réduire ces expressions à l'aide de la double distributivité :

$$A = (4 + x)(5x + 3)$$

$$B = (-2x + 4)(x - 2)$$

$$C = (-3x - 2)(7 - 2x)$$

$$D = -(4x - 1)(-1 - x)$$

solution :

$$\begin{aligned} A &= (4 + x)(5x + 3) \\ &= 4 \times 5x + 4 \times 3 + x \times 5x + x \times 3 \\ &= 20x + 12 + 5x^2 + 3x \\ &= 5x^2 + 23x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= (-2x + 4)(x - 2) \\
 &= -2x \times x + 2x \times 2 + 4 \times x - 4 \times 2 \\
 &= -2x^2 + 4x + 4x - 8 \\
 &= -2x^2 + 8x - 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= (-3x - 2)(7 - 2x) \\
 &= -3x \times 7 + 3x \times 2x - 2 \times 7 + 2 \times 2x \\
 &= -21x + 6x^2 - 14 + 4x \\
 &= 6x^2 - 17x - 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= -(4x - 1)(-1 - x) \\
 &= -(-4x \times 1 - 4x \times x + 1 \times 1 + 1 \times x) \\
 &= -(-4x - 4x^2 + 1 + x) \\
 &= -(-4x^2 - 3x + 1) \\
 &= 4x^2 + 3x - 1
 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Développer et réduire ces expressions :

$$A = 18x + (x - 3)(5 - 2x)$$

$$B = 15 - (-3x - 1)(x - 2)$$

$$C = 5y(-y + 3) + (2y - 3)(5 - y)$$

$$D = (2x - 1)(2x - 3) + (5 + x)(4 - 2x)$$

$$E = (6x - 2)(x + 1) - 3x(-x + 3) - (2 - x)(3 - 3x)$$

$$F = -4t(2t - 1)(-t + 3)$$

Solution :

$$\begin{aligned}
 A &= 18x + (x - 3)(5 - 2x) \\
 &= 18x + x \times 5 - x \times 2x - 3 \times 5 + 3 \times 2x \\
 &= 18x + 5x - 2x^2 - 15 + 6x \\
 &= -2x^2 + 29x - 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= 15 - (-3x - 1)(x - 2) \\
 &= 15 - [-3x \times x + 3x \times 2 - 1 \times x + 1 \times 2] \\
 &= 15 - [-3x^2 + 6x - x + 2] \\
 &= 15 - [-3x^2 + 5x + 2] \\
 &= 15 + 3x^2 - 5x - 2 \\
 &= 3x^2 - 5x + 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= 5y(-y + 3) + (2y - 3)(5 - y) \\
 &= -5y \times y + 5y \times 3 + 2y \times 5 - 2y \times y - 3 \times 5 + 3 \times y \\
 &= -5y^2 + 15y + 10y - 2y^2 - 15 + 3y \\
 &= -7y^2 + 28y - 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= (2x - 1)(2x - 3) + (5 + x)(4 - 2x) \\
 &= 2x \times 2x - 2x \times 3 - 1 \times 2x + 1 \times 3 + 5 \times 4 - 5 \times 2x + x \times 4 - x \times 2x \\
 &= 4x^2 - 6x - 2x + 3 + 20 - 10x + 4x - 2x^2 \\
 &= 2x^2 - 14x + 23
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= (6x - 2)(x + 1) - 3x(-x + 3) - (2 - x)(3 - 3x) \\
 &= 6x \times x + 6x \times 1 - 2 \times x - 2 \times 1 + 3x \times x - 3x \times 3 - [(2 - x)(3 - 3x)] \\
 &= 6x^2 + 6x - 2x - 2 + 3x^2 - 9x - [2 \times 3 - 2 \times 3x - x \times 3 + x \times 3x] \\
 &= 9x^2 - 5x - 2 - [6 - 6x - 3x + 3x^2] \\
 &= 9x^2 - 5x - 2 - [3x^2 - 9x + 6] \\
 &= 9x^2 - 5x - 2 - 3x^2 + 9x - 6 \\
 &= 6x^2 + 4x - 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= -4t(2t - 1)(-t + 3) \\
 &= -4t(-2t \times t + 2t \times 3 + 1 \times t - 1 \times 3) \\
 &= -4t(-2t^2 + 6t + t - 3) \\
 &= -4t(-2t^2 + 7t - 3) \\
 &= 4t \times 2t^2 - 4t \times 7t + 4t \times 3 \\
 &= 8t^3 - 28t^2 + 12t
 \end{aligned}$$

Remarque :

J'en profite pour apporter une petite précision au niveau des signes obtenus lors des développements.

Il existe toujours deux façons de faire ; personnellement je préfère la seconde que je vais vous exposer ici dans cet exemple. Le résultat final à la fin est le même de toute façon.

- Soit on développe avec les formules $k(a+b)=ka + kb$ ou $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ et on cherche les signes de chaque produit après coup :

$$\begin{aligned}
 A &= (2x - 3)(5 - 4x) \\
 &= 2x \times 5 + 2x \times (-4x) + (-3) \times 5 + (-3) \times (-4x) \\
 &= 2x \times 5 + (-8x^2) + (-15) + (+12x) \\
 &= 10x - 8x^2 - 15 + 12x \\
 &= -8x^2 + 22x - 15
 \end{aligned}$$

- Soit on cherche directement le signe de chaque produit et on zappe les + des additions (on ne met que le signe des produits à la place)

$$\begin{aligned}
 A &= (2x - 3)(5 - 4x) \\
 &= 2x \times 5 - 2x \times 4x - 3 \times 5 + 3 \times 4x \\
 &= 10x - 8x^2 - 15 + 12x \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

IV. Factorisations avec la distributivité :

On a vu que lorsqu'on utilise les formules :

$$k(a + b) = ka + kb$$

ou $(a+b)(c+d)= ac + ad + bc + bd$

dans ce sens, de la gauche vers la droite, on développe l'expression.

Mais on peut utiliser les formules dans l'autre sens :

$$ka + kb = k(a + b)$$

ou $ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$

Dans ce cas on transforme une somme en produit.

Lorsqu'on transforme une somme en produit on dit, comme je vous l'ai déjà répété 20 millions de fois qu'on **factorise** l'expression.

Pour factoriser des expressions on pourra :

- Utiliser la distributivité : $ka + kb = k(a + b)$
- Utiliser une identité remarquable (plus tard dans le chapitre.)

On n'utilisera jamais la double distributivité pour factoriser une expression car il est très compliqué de pouvoir l'appliquer correctement en retrouvant ce qu'on avait à l'intérieur des parenthèses au départ...

Pour factoriser une expression avec la distributivité, il faut trouver ce que vaut k dans l'expression $ka + kb = k(a + b)$

Ce facteur sera appelé facteur commun.

Il faut le faire apparaître en écrivant bien les produits $k \times a$ et $k \times b$ dans la somme de départ.

Il faut aussi essayer de trouver le « meilleur » facteur commun pour avoir la meilleure factorisation possible.

Exemples :

1) Pour factoriser $A = 15x + 10$

On remarque que $A = 5 \times 3x + 5 \times 2$

Le facteur commun est donc **5** ici.

On obtient donc avec la formule de la distributivité :

$$A = 5(3x + 2)$$

(c'est simple : vous mettez le facteur commun, ici 5, vous ouvrez une parenthèse et vous recopiez dans les parenthèses tout ce qu'il reste de l'expression en retirant le facteur commun et les signes de multiplication.)

Dans cet exemple le facteur commun est donc un nombre.

2) Pour factoriser $B = 7y^5 - 3y^2$

On remarque que $B = 7y^3 \times y^2 - 3 \times y^2$

Le facteur commun est donc ici **y^2**

On obtient donc avec la distributivité :

$$B = y^2(7y^3 - 3)$$

Ici le facteur commun est y^2

Remarque :

Il faut trouver le meilleur facteur commun. On aurait pu prendre y au lieu de y^2 mais ce n'est pas la meilleure solution car on aurait obtenu $B = y(7y^4 - 3y)$ comme factorisation.

Et on voit (normalement) qu'on aurait pu factoriser ce qui est à l'intérieur des parenthèses...

3) Pour factoriser $C = 36x^2 + 24x$

On remarque que $C = 6x \times 6x + 6x \times 4$

Le facteur commun est donc $6x$

(on aurait pu faire apparaître $2x$ ou $4x$ ou 2 ou 4 ou 6 , mais la meilleure factorisation possible est $6x...$)

Donc avec la distributivité on trouve :

$$C = 6x(6x + 4)$$

Exercice :

Factoriser ces expressions à l'aide de la distributivité en utilisant le facteur commun donné :

$$\begin{aligned} A &= -45x + 30 && (\text{facteur commun : } 5) \\ &= -5 \times \dots + 5 \times \dots \\ &= 5(-\dots + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 10x^2 + 16x && (\text{facteur commun : } 2x) \\ &= 2x \times \dots + 2x \times \dots \\ &= 2x(\dots + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= -14x^3 + 21x - 35 && (\text{facteur commun : } 7) \\ &= -7 \times \dots + 7 \times \dots - 7 \times \dots \\ &= 7(-\dots + \dots - \dots) \end{aligned}$$

$$D = 48y^4 + 64y^2 - 32y \quad (\text{facteur commun : } 16y)$$

$$E = -15x^2 + 30x^3 - 15x^6 \quad (\text{facteur commun : } 15x^2)$$

$$F = 6x + 6 \quad (\text{facteur commun : } 6)$$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= -45x + 30 && (\text{facteur commun : } 5) \\ &= -5 \times 9x + 5 \times 6 \\ &= 5(-9x + 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 10x^2 + 16x && (\text{facteur commun : } 2x) \\ &= 2x \times 5x^2 + 2x \times 8 \\ &= 2x(5x^2 + 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= -14x^3 + 21x - 35 && (\text{facteur commun : } 7) \\ &= -7 \times 2x^3 + 7 \times 3x - 7 \times 5 \\ &= 7(-2x^3 + 3x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 48y^4 + 64y^2 - 32y && (\text{facteur commun : } 16y) \\ &= 16y \times 3y^3 + 16y \times 4y - 16y \times 2 \\ &= \mathbf{16y(3y^3 + 4y - 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= -45x^2 + 30x^3 - 15x^6 && (\text{facteur commun : } 15x^2) \\ &= -15x^2 \times 3 + 15x^2 \times 2x - 15x^2 \times x^4 \\ &= \mathbf{15x^2(-3 + 2x - x^4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 6x + 6 && (\text{facteur commun : } 6) \\ &= 6 \times x + 6 \times 1 \\ &= \mathbf{6(x + 1)} \end{aligned}$$

Ce dernier exemple est important car si le facteur commun apparaît tout seul dans la somme il faut penser à ajouter le X 1 pour ne pas se tromper ! ! ! !

Pensez aussi à souligner le facteur commun lorsque vous écrivez la somme en ajoutant les multiplications, cela rend la factorisation plus simple(moi je vous l'ai écrit en vert sur les 3 derniers exemples.)

Remarque :

Lorsqu'on factorise des expressions littérales à l'aide de la distributivité, il se peut que le facteur commun soit une expression entre parenthèses...

Dans ce cas il suffit de faire comme avant pour factoriser : vous faites apparaître le facteur commun, vous le soulignez, vous le mettez tout seul (entre parenthèses s'il y a besoin) et vous recopiez tout le reste entre parenthèses ou entre crochets...

Exemples :

Factoriser ces expressions :

$$\begin{aligned} A &= 4x(5x - 2) + (5x - 2)(3 - x) \\ &= (5x - 2)[4x + (3 - x)] \\ &= (5x - 2)(4x + 3 - x) \\ &= \mathbf{(5x - 2)(3x + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (6x + 1)(4 - 2x) - (6x + 1)(x - 3) \\ &= (6x + 1)[(4 - 2x) - (x - 3)] \\ &= (6x + 1)(4 - 2x - x + 3) \\ &= \mathbf{(6x + 1)(7 - 3x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= -(x + 2)(3 - x) + (x + 2)(4 - 2x) \\ &= (x + 2)[- (3 - x) + (4 - 2x)] \\ &= (x + 2)(- 3 + x + 4 - 2x) \\ &= \mathbf{(x + 2)(-x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= (8x - 3)(x - 2) - (8x - 3)(2x - 1) \\
 &= (8x - 3)[(x - 2) - (2x - 1)] \\
 &= (8x - 3)(x - 2 - 2x + 1) \\
 &= \mathbf{(8x - 3)(-x - 1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= (2 - 3x)^2 - 4x(2 - 3x) \\
 &= (2 - 3x)(2 - 3x) - 4x(2 - 3x) \\
 &= (2 - 3x)[(2 - 3x) - 4x] \\
 &= (2 - 3x)(2 - 3x - 4x) \\
 &= \mathbf{(2 - 3x)(-7x + 2)}
 \end{aligned}$$

V. Quelques exercices tout à fait formidables !!!

Exercice 1 :

Développer et réduire ces expressions :

$$A = \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5} - \frac{9x}{2}\right)$$

$$B = (2x - 1 + x^2)(-4x + 2)$$

$$C = (x + 1)^2 - (2x + 4)(3 - x)$$

Solution :

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5} - \frac{9x}{2}\right) \\
 &= \frac{x}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{x}{2} \times \frac{9x}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{9x}{2} \\
 &= \frac{x \times 2 \times 2}{2 \times 5} - \frac{9x^2}{4} - \frac{8}{15} + \frac{3 \times 3x}{3} \\
 &= \frac{2x}{5} - \frac{9x^2}{4} - \frac{8}{15} + 3x \\
 &= -\frac{9x^2}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{15x}{5} - \frac{8}{15} \\
 &= \mathbf{-\frac{9x^2}{4} + \frac{17x}{5} - \frac{8}{15}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= (2x - 1 + x^2)(-4x + 2) \\
 &= -2x \times 4x + 2x \times 2 + 1 \times 4x - 1 \times 2 - x^2 \times 4x + x^2 \times 2 \\
 &= -8x^2 + 4x + 4x - 2 - 4x^3 + 2x^2 \\
 &= \mathbf{-4x^3 - 6x^2 + 8x - 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= (x + 1)^2 - (2x + 4)(3 - x) \\
 &= (x + 1)(x + 1) - [(2x + 4)(3 - x)] \\
 &= x \times x + x \times 1 + 1 \times x + 1 \times 1 - [2x \times 3 - 2x \times x + 4 \times 3 - 4 \times x] \\
 &= x^2 + x + x + 1 - [6x - 2x^2 + 12 - 4x] \\
 &= x^2 + 2x + 1 - [-2x^2 + 2x + 12]
 \end{aligned}$$

$$= x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 2x - 12$$

$$= \mathbf{3x^2 - 11}$$

Ici il fallait penser à remplacer $(x+1)^2$ par $(x+1)(x+1)$ pour utiliser la double distributivité. On verra avec les identités remarquables comment développer ce genre d'expressions plus facilement.

Remarquez que dans chaque réponse finale, j'écris les « lettres » dans l'ordre décroissant de leurs puissances. Par exemple, je mets d'abord les x^2 puis les x et enfin les nombres seuls... Vous verrez en quoi cela sera utile lorsque nous utiliserons les identités remarquables...

Exercice 2 :

Factoriser ces expressions à l'aide de la distributivité :

$$A = -35x + 25$$

$$B = 14x + 7$$

$$C = 64x^3 - 8x^2 + 16$$

$$D = 12y^5 + 8y^7 - 16y^6$$

$$E = 120x - 80x^3 + 40$$

Solution :

$$A = -35x + 25$$

$$= -5 \times 7x + 5 \times 5$$

$$= \mathbf{5(7x + 5)}$$

$$B = 14x + 7$$

$$= 7 \times 2x + 7 \times 1$$

$$= \mathbf{7(2x + 1)}$$

$$C = 64x^3 - 8x^2 + 16$$

$$= 8 \times 8x^3 - 8 \times x^2 + 8 \times 2$$

$$= \mathbf{8(8x^3 - x^2 + 2)}$$

$$D = 12y^5 + 8y^7 - 16y^6$$

$$= 4y^5 \times 3 + 4y^5 \times 2y^2 - 4y^5 \times 4y$$

$$= \mathbf{4y^5(3 + 2y^2 - 4y)}$$

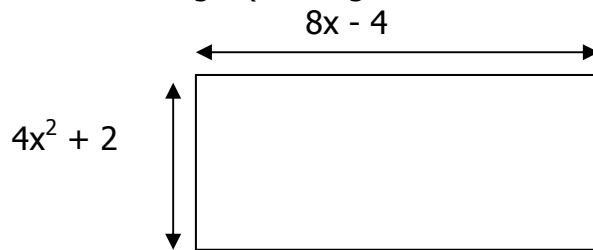
$$E = 120x - 80x^3 + 40$$

$$= 40 \times 30x - 40 \times 2x^3 + 40 \times 1$$

$$= \mathbf{40(30x - 2x^3 + 1)}$$

Exercice 3 :

On considère ce rectangle (les longueurs sont en cm)



- 1) Donner l'expression A permettant de calculer l'aire de ce rectangle en fonction de x.
- 2) Développer et réduire l'expression A.
- 3) Factoriser l'expression obtenue à la question 2)
- 4) Donner l'expression B permettant de calculer le périmètre de ce rectangle. Factoriser l'expression obtenue.
- 5) Calculer l'aire du rectangle si $x = 1$, puis le périmètre de ce rectangle si $x = 3$.

Solution :

1) $A = \text{longueur} \times \text{largeur}$
 $= (8x - 4)(4x^2 + 2)$

2) $A = (8x - 4)(4x^2 + 2)$
 $= 8x \times 4x^2 + 8x \times 2 - 4 \times 4x^2 - 4 \times 2$
 $= 32x^3 + 16x - 16x^2 - 8$

3) $A = 32x^3 + 16x - 16x^2 - 8$
 $= 8 \times 4x^3 + 8 \times 2x - 8 \times 2x^2 - 8 \times 1$
 $= 8(4x^3 + 2x - 2x^2 - 1)$

4) $B = 2 \times \text{longueur} + 2 \times \text{largeur}$
 $= 2(4x^2 + 2) + 2(8x - 4)$
 $= 2 \times 4x^2 + 2 \times 2 + 2 \times 8x - 2 \times 4$
 $= 8x^2 + 4x + 16x - 8$
 $= 8x^2 + 20x - 8$

5)

- Si $x = 1$:
 $A = (8x - 4)(4x^2 + 2)$
 $= (8 \times 1 - 4)(4 \times 1^2 + 2)$
 $= (8 - 4)(4 \times 1 + 2)$
 $= 4(4 + 2)$
 $= 4 \times 6$
 $= 24 \text{ (cm}^2\text{)}$

- Si $x = 3$:
 $B = 8x^2 + 20x - 8$
 $= 8 \times 3^2 + 20 \times 3 - 8$
 $= 8 \times 9 + 60 - 8$
 $= 72 + 60 - 8$
 $= \mathbf{124 (cm)}$

Remarque :

Pour calculer A on aurait pu prendre la forme développée obtenue à la question 2 ou la forme trouvée à la question 3. Généralement on prend la formule la plus simple... Et si on a du mal avec les expressions littérales il vaut mieux prendre la formule donnée dans l'énoncé, si elle est donnée, pour être sûr d'utiliser une bonne formule. De même pour B on aurait pu utiliser une autre formule équivalente.

Exercice 4 :

Un exercice important car il contient un « programme de calcul », quelque chose qui est classique lors des exercices sur les expressions littérales.

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 2
- Prendre le carré du nombre obtenu
- Retirer 4 fois le nombre choisi au départ

- 1) Que donne le programme en partant de 3 ? De - 4 ?
- 2) Donner l'expression obtenue en partant d'un nombre x ?
- 3) Simplifier l'expression obtenue.
- 4) Factoriser l'expression obtenue à la question 3).
- 5) Quel nombre obtient-on en partant de $\frac{2}{3}$? De 4 ?

Solution :

1) En partant de 3 :

- 3
- $3 + 2 = 5$
- $5^2 = 25$
- $25 - 4 \times 3 = 25 - 12 = 13$

On obtient **13** en partant de 3.

En partant de - 4 :

- - 4
- $-4 + 2 = -2$
- $(-2)^2 = 4$ (Et non pas $-2^2 = -4$! ! !)
- $4 - 4 \times (-4) = 4 + 16 = 20$

On obtient **20** en partant de - 4

2) En partant de x :

- x
- $x + 2$
- $(x + 2)^2$
- $(x + 2)^2 - 4x$

On obtient **$(x + 2)^2 - 4x$** en partant de x

3) On a :

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - 4x \\&= (x + 2)(x + 2) - 4x \\&= x \times x + x \times 2 + 2 \times x + 2 \times 2 - 4x \\&= x^2 + 2x + 2x + 4 - 4x \\&= \mathbf{x^2 - 4x}\end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned}x^2 - 4x \\&= x \times x - 4 \times x \\&= \mathbf{x(x - 4)}\end{aligned}$$

5) En partant de $\frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\text{On a : } \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - 4 \right) \\&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{12}{3} \right) \\&= \frac{2}{3} \times \left(-\frac{10}{3} \right) \\&= -\frac{20}{9}\end{aligned}$$

On obtient **$-\frac{20}{9}$** en partant de $\frac{2}{3}$.

En partant de 4 :

$$4 \times (4 - 4) = 4 \times 0 = 0$$

On obtient **0** en partant de 4.

(Pour la dernière question on utilise l'expression factorisée qui est plus simple à appliquer et donne des calculs plus faciles à faire. On verra dans d'autres exercices que lorsqu'on dispose d'une expression de base, d'une expression factorisée et d'une expression développée il faut toujours essayer d'utiliser la plus simple par rapport à la valeur de départ donnée, même si le résultat obtenu sera le même quelle que soit la formule choisie.)

20- IDENTITES REMARQUABLES

I. Introduction :

On va développer et réduire ces trois expressions à l'aide de la double distributivité :

$$\begin{aligned} 1) \quad & (a + b)^2 \\ &= (a + b)(a + b) \\ &= aXa + aXb + bXa + bXb \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{car } ab \text{ est pareil que } ba \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & (a - b)^2 \\ &= (a - b)(a - b) \\ &= aXa - aXb - bXa + bXb \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{car } ab \text{ est pareil que } ba \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & (a + b)(a - b) \\ &= aXa - aXb + bXa - bXb \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

On en déduit ces 3 formules appelées identités remarquables :

- Quels que soient a et b on a :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Ces 3 formules sont à apprendre par cœur ! Elles permettent de développer (ou de factoriser) certaines expressions très rapidement en évitant pas mal d'erreurs de calculs ! On va déjà voir là comment s'en servir pour développer des expressions... sans avoir à utiliser la double distributivité...

II. Développer une expression avec une identité remarquable :

Exemples :

Développer ces expressions et les réduire :

$$A = (3x + 4)^2$$

Cette expression est semblable à $(a + b)^2$ où $a = 3x$ et $b = 4$

On va donc la développer en $a^2 + 2ab + b^2$

On obtient donc le carré du premier terme + ce qu'on appelle le double produit : 2 X le premier X le second + le carré du dernier terme.

$$A = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2$$

(attention à bien mettre les parenthèses pour le carré si c'est une expression)

$$= 9x^2 + 24x + 16$$

Et c'est terminé ! C'est beaucoup plus rapide que de calculer $(3x+4)(3x+4)$ et de développer avec la double distributivité..

$$B = (5 - 2x)^2$$

Cette expression est semblable à $(a - b)^2$ avec $a = 5$ et $b = 2x$

On va donc la développer en $a^2 - 2ab + b^2$

On obtient donc le carré du premier terme - ce qu'on appelle le double produit (2 X le premier X le second) + le carré du dernier terme.

$$B = 5^2 - 2 \times 5 \times 2x + (2x)^2$$

$$= 25 - 20x + 4x^2$$

$$C = (4 - 3x)(4 + 3x)$$

Cette expression ressemble à $(a+b)(a-b)$ qui est pareil que

$(a-b)(a+b)$ avec $a = 4$ et $b = 3x$

On va donc la développer en $a^2 - b^2$

(Cette formule est facile à retenir : on obtient la différence des deux carrés !)

$$C = 4^2 - (3x)^2$$

$$= 16 - 9x^2$$

Et c'est terminé ! C'est beaucoup plus rapide que de développer $(4-3x)(4+3x)$ avec la double distributivité !

Remarque :

Pour bien retenir les identités remarquables :

$(a + b)^2$ donne :

carré du 1^{er} terme $\boxed{+}$ double produit + carré du 2^{ème}

$(a - b)^2$ donne :

carré du 1^{er} terme $\boxed{-}$ double produit + carré du 2^{ème}

$(a+b)(a-b)$ ou $(a-b)(a+b)$ donne :

différence entre le carré du 1^{er} terme et le carré du 2^{ème} terme

Exercice 1 :

Développer et réduire ces expressions :

$$D = (2x - 7)^2$$

$$E = (1 + 6x)^2$$

$$F = (4x - 5)(4x + 5)$$

$$G = (x + 9)^2$$

$$H = (2 - 3x)^2$$

$$I = (5x - 2)(2 + 5x)$$

Solution :

$$\begin{aligned} D &= (2x - 7)^2 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 \\ &= \mathbf{4x^2 - 28x + 49} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= (1 + 6x)^2 \\ &= 1^2 + 2 \times 1 \times 6x + (6x)^2 \\ &= \mathbf{1 + 12x + 36x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (4x - 5)(4x + 5) \\ &= \mathbf{(4x)^2 - 5^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= (x + 9)^2 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2 \\ &= \mathbf{x^2 + 18x + 81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= (2 - 3x)^2 \\ &= 2^2 - 2 \times 2 \times 3x + (3x)^2 \\ &= \mathbf{4 - 12x + 9x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (5x - 2)(2 + 5x) = (5x - 2)(5x + 2) \\ &= (5x)^2 - 2^2 \\ &= \mathbf{25x^2 - 4} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Développer et réduire ces expressions en utilisant soit la distributivité, soit la double distributivité, soit une identité remarquable :

$$A = (4x - 2)(4x + 3)$$

$$B = 7y(5y - 3)$$

$$C = (x + 11)^2$$

$$D = (2x - 6)^2$$

$$E = \left(\frac{x}{3} + 2\right)\left(\frac{x}{3} - 2\right)$$

$$F = (6 - 4x)(4x + 6)$$

Solution :

$$\begin{aligned}A &= (4x - 2)(4x + 3) \\&= 4x \times 4x + 4x \times 3 - 2 \times 4x - 2 \times 3 \\&= 16x^2 + 12x - 8x - 6 \\&= \mathbf{16x^2 + 4x - 6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= 7y(5y - 3) \\&= 7y \times 5y - 7y \times 3 \\&= \mathbf{35y^2 - 21y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= (x + 11)^2 \\&= x^2 + 2 \times x \times 11 + 11^2 \\&= \mathbf{x^2 + 22x + 121}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= (2x - 6)^2 \\&= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 6 + 6^2 \\&= \mathbf{4x^2 - 24x + 36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{x}{3} + 2\right)\left(\frac{x}{3} - 2\right) \\&= \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2^2 \\&= \mathbf{\frac{x^2}{9} - 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= (6 - 4x)(4x + 6) \\&= (6 - 4x)(6 + 4x) \\&= 6^2 - (4x)^2 \\&= \mathbf{36 - 16x^2}\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Développer et réduire ces expressions en utilisant les bonnes méthodes :

$$\begin{aligned}A &= (5x - 2)^2 - 6x(2x + 1) \\B &= (3x + 1)(3x - 1) - (x - 4)^2\end{aligned}$$

Solution :

$$\begin{aligned}A &= (5x - 2)^2 - 6x(2x + 1) \\&= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2 - 6x \times 2x - 6x \times 1 \\&= 25x^2 - 20x + 4 - 12x^2 - 6x \\&= \mathbf{13x^2 - 26x + 4}\end{aligned}$$

(ici en bleu on utilise $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
et en rouge on utilise la distributivité)

$$\begin{aligned}
 B &= (3x + 1)(3x - 1) - (x - 4)^2 \\
 &= (3x)^2 - 1^2 - (x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2) \\
 &= 9x^2 - 1 - (x^2 - 8x + 16) \\
 &= 9x^2 - 1 - x^2 + 8x - 16 \\
 &= 8x^2 + 8x - 17
 \end{aligned}$$

(ici en bleu on utilise $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

et en rouge $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et on développe à l'intérieur de parenthèses à cause du $-$ qui est devant...)

III. Factoriser avec les identités remarquables :

1) Factoriser avec $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

Pour factoriser avec cette identité remarquable, il faut déjà avoir une différence de deux carrés. Si vous avez ça vous pouvez l'utiliser pour factoriser !

Par exemple :

L'expression $25x^2 + 9$ ne peut pas se factoriser avec cette identité remarquable (il ne s'agit pas d'une différence !)

L'expression $3x - 7$ ne peut pas se factoriser (car on a du x dans $3x$ et il faudrait du carré de x .)

Si vous avez une différence de deux carrés, c'est très facile de factoriser en détaillant bien comme je vous montre ici :

Exemples :

Factoriser ces expressions :

$$A = 16x^2 - 4$$

On a bien une différence de deux carrés car $16x^2$ est le carré de.... $4x$, et 4 est le carré de 2 ... Donc :

$$A = (4x)^2 - 2^2 \quad (\text{n'oubliez pas les parenthèses autour de } 4x !)$$

Et ici on a donc, dans la formule donnée dans le cours, $a = 4x$ et $b = 2$.

Ce qui nous donne :

$$A = (4x - 2)(4x + 2) \quad (\text{ou } (4x + 2)(4x - 2))$$

On fait pareil pour les autres exemples sans faire de blabla :

$$\begin{aligned}
 B &= 49 - 9x^2 \\
 &= 7^2 - (3x)^2 \\
 &= (7 - 3x)(7 + 3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= y^2 - 1 \\
 &= y^2 - 1^2 \\
 &= (y - 1)(y + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{x^2}{25} - 100 \\
 &= \left(\frac{x}{5}\right)^2 - 10^2 \\
 &= \left(\frac{x}{5} - 10\right)\left(\frac{x}{5} + 10\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{9}{16} - \frac{4}{81}y^2 \\
 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{9}y\right)^2 \\
 &= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{9}y\right)\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{9}y\right)
 \end{aligned}$$

Remarque :

On peut en fait toujours factoriser si on a une différence de deux termes avec une lettre au carré et un nombre tout seul, même si les nombres ne sont pas des carrés connus.

Par exemple :

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 7 &= (\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{7})^2 \\
 &= (\sqrt{3}x - \sqrt{7})(\sqrt{3}x + \sqrt{7})
 \end{aligned}$$

car $\sqrt{3}$ est la racine carrée de 3... donc le carré de $\sqrt{3}$ est... 3....

2) Factoriser une expression avec $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

On va utiliser ces identités dans ce sens :

$$\begin{aligned}
 a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\
 a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2
 \end{aligned}$$

Etape 1 :

- Pour factoriser avec ces deux identités remarquables, il faut déjà vérifier qu'on a 3 termes et pas deux seulement, et il faut aussi penser à écrire l'expression dans l'ordre des puissances décroissantes.

Par exemple au lieu d'écrire : $34x + 17 + 4x^2$

On pense à écrire : $4x^2 + 34x + 17$

(D'abord les x au carré, puis les x puis le nombre seul, cela va simplifier la méthode pour savoir si on peut factoriser ou pas.)

En faisant ainsi, on a les « carrés » possibles de la formule aux extrémités de l'expression.

Etape 2 :

- Ensuite, on vérifie rapidement qu'il n'y a pas de problèmes de signes par rapport à l'identité remarquable utilisée : on doit avoir uniquement des + devant les termes aux extrémités !

Par exemple :

L'expression : $4x^2 - 9x - 3$ ne pourra être factorisée avec une identité remarquable (il y a un - devant le 3 et on devrait avoir un +)

L'expression : $-3x^2 + 5x + 2$ ne pourra être factorisée avec une identité remarquable (il y a un - devant le $3x^2$ et on devrait avoir un +)

L'expression : $4x^2 - 16x + 4$ pourra **peut-être** factorisée car il y a bien des + devant les termes aux extrémités.

Remarque :

Attention, il faut parfois ruser avant d'abandonner et de se dire qu'on ne peut pas !

Si on doit essayer de factoriser $-4x^2 + 8x - 4$ on peut le faire car cette expression peut s'écrire sous la forme :

- ($4x^2 - 8x + 4$) et il y a bien des + devant $4x^2$ et 4...

Etape 3 :

- Si les signes sont cohérents avec les deux formules, on va voir si on peut la factoriser. Pour cela, il faut déjà transformer les termes aux extrémités en carrés :

Par exemple : $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 12x + 3^2$

Si on peut la factoriser, alors dans les formules données on a : $a = 2x$ et $b = 3$

Une fois cela fait, on vérifie que le terme du milieu correspond au double produit :

Dans l'exemple précédent : $2ab = 2 \times 2x \times 3 = 12x$

donc dans cet exemple, le terme du milieu $12x$ correspond bien au double produit !

Donc on peut factoriser l'expression avec une identité remarquable !

Toutes ces étapes sont à faire de tête, à part celle où on remet les termes dans l'ordre des puissances décroissantes. Pour bien rédiger, une fois qu'on a vérifié que ça fonctionne on écrit ainsi :

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 12x + 9 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= \mathbf{(2x - 3)^2} \end{aligned}$$

(Le signe devant le double produit sera le signe qu'on aura entre les deux termes à l'intérieur des parenthèses... On n'oublie pas non plus de bien mettre les parenthèses autour des carrés si nécessaire pour ne pas se tromper...)

Essayons de voir si on peut factoriser les expressions suivantes avec une identité remarquable :

Exemple 1 :

$A = 25x^2 + 10x + 1$ *(les termes sont dans le bon ordre et les signes sont cohérents : il y a bien des + aux extrémités)*

$= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 1 + 1^2$ *(on fait apparaître les carrés aux extrémités et on a vérifié que le double produit est égal à 10x)*

$$= (5x + 1)^2$$

(on rappelle que le signe entre les deux termes dans les parenthèses est le même que celui devant le double produit...)

Exemple 2 :

$B = 9x^2 - 20x + 25$ *(termes dans le bon ordre, signes cohérents.*

Mais ici $a = 3x$ et $b = 5$ (car $(3x)^2 = 9x^2$ et $5^2 = 25$)

et $2 \times 3x \times 5 = 30x$ alors que le terme du milieu est 20x...

Donc on ne peut pas la factoriser avec une identité remarquable !

Exemple 3 :

$$C = 8x - x^2 + 2$$

$$= -x^2 + 8x + 2$$
 (on remet les termes dans le bon ordre)

et ici il y a un problème de signes ! Il y a - et un + devant les termes aux extrémités ! Donc on ne peut pas la factoriser avec une identité remarquable !

(Essayer de factoriser les expressions suivantes. Je vous les corrige à la fin du document.)

IV. Une première série d'exercices top moutons !

Exercice 1 :

Essayer de factoriser ces expressions :

$$D = 4x^2 - 40x - 100$$

$$E = 25x^2 + 40x + 16$$

$$F = x^2 - 3x + 9$$

$$G = x^2 + 2x + 1$$

$$H = 32x - 16 - 16x^2$$

Solution :

$$D = 4x^2 - 40x - 100$$

Ne se factorise pas avec une identité remarquable à cause des signes !

Mais on peut la factoriser avec la distributivité :

$$D = 4 \times x^2 - 4 \times 10x - 4 \times 25 = 4(x^2 - 10x + 25)$$

$$\begin{aligned} E &= 25x^2 + 40x + 16 \\ &= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 4 + 4^2 \\ &= \mathbf{(5x + 4)^2} \end{aligned}$$

$$F = x^2 - 3x + 9$$

Ne se factorise pas car ici : $a = x$ et $b = 3$ (car $3^2 = 9$)
et $2 \times x \times 3 = 6x$ et pas $3x$...

$$\begin{aligned} G &= x^2 + 2x + 1 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 \\ &= \mathbf{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= 32x - 16 - 16x^2 \\ &= -16x^2 + 32x - 16 \\ &= - (16x^2 - 32x + 16) \\ &= - ((4x)^2 - 2 \times 4x \times 4 + 4^2) \\ &= \mathbf{-(4x - 4)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Factoriser ces expressions à l'aide d'une identité remarquable (on peut toutes les factoriser avec une identité remarquable :)

$$A = x^2 + 4x + 4$$

$$B = x^2 - 10x + 25$$

$$C = x^2 - 49$$

$$D = 9x^2 + 30x + 25$$

$$E = 16x^2 - 8x + 1$$

$$F = 4x^2 - 81$$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 4x + 4 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 \\ &= \mathbf{(x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 10x + 25 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= \mathbf{(x - 5)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= x^2 - 49 \\ &= x^2 - 7^2 \\ &= (x - 7)(x + 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 9x^2 + 30x + 25 \\ &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 \\ &= (3x + 5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 16x^2 - 8x + 1 \\ &= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 \\ &= (4x - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 4x^2 - 81 \\ &= (2x)^2 - 9^2 \\ &= (2x - 9)(2x + 9) \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Sans calculatrice calculer astucieusement (à l'aide d'une identité remarquable... je dis ça je dis rien) :

$$51^2 - 49^2 \text{ et } 101^2 - 100^2$$

Solution :

$$\begin{aligned} 51^2 - 49^2 \\ &= (51 - 49)(51 + 49) \\ &= 2 \times 100 \\ &= \mathbf{200} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 101^2 - 100^2 \\ &= (101 - 100)(101 + 100) \\ &= \mathbf{1 \times 201} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

On considère le programme de calcul suivant :

- 1) Choisir un nombre
- 2) Lui soustraire 10
- 3) Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ
- 4) Ajouter 25

1) Que donne le programme en partant de 2 ? de -3 ?

- 2) Donner l'expression A obtenue à l'aide de ce programme en partant d'un nombre x.
- 3) Développer et réduire l'expression A.
- 4) Factoriser l'expression obtenue à la question 3) à l'aide d'une identité remarquable.

Solution :

1)

- en partant de 2 :
 - 1) 2
 - 2) $2 - 10 = -8$
 - 3) $-8 \times 2 = -16$
 - 4) $-16 + 25 = 9$
- en partant de -3 :
 - 1) -3
 - 2) $-3 - 10 = -13$
 - 3) $-13 \times (-3) = 39$
 - 4) $36 + 25 = 61$

Donc **le programme donne 9 en partant de 2, et il donne 61 en partant de -3**

2) En partant d'un nombre x :

- 1) x
- 2) $x - 10$
- 3) $(x - 10)x$
- 4) $(x - 10)x + 25$

L'expression obtenue est donc : **$A = (x - 10)x + 25$**

3) $A = (x - 10)x + 25$

$= x \times x - 10 \times x + 25$

$= x^2 - 10x + 25$

(On développe avec la distributivité)

4) $A = x^2 - 10x + 25$

$= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$

$= (x - 5)^2$

(On peut factoriser avec une identité remarquable)

V. Factorisations d'expressions plus complexes :

Les identités remarquables vont vous permettre de factoriser des expressions « plus complexes », en particulier grâce à celles-ci : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Le a et le b dans cette formule ne sont pas forcément des nombres ou des lettres, ils peuvent être aussi des expressions « entre parenthèses »...

Exemples :

- Observons l'expression $A = (x - 2)^2 - 25$
On remarque qu'on a bien une différence de deux carrés : le carré de $(x - 2)$ et le carré de 5.
On applique alors la même méthode qu'avant pour factoriser :
 $A = (x - 2)^2 - 5^2$
 $= [(x - 2) - 5][(x - 2) + 5]$
On enlève les parenthèses... je vous ai déjà expliqué comment on fait...
 $= (x - 2 - 5)(x - 2 + 5)$
On réduit à l'intérieur des parenthèses...
 $= (x - 7)(x + 3)$
- Factorisons l'expression $B = (2x - 3)^2 - (x + 3)^2$
 $B = \begin{matrix} (2x - 3)^2 & - & (x + 3)^2 \\ a^2 & - & b^2 \end{matrix}$
 $= [(2x - 3) - (x + 3)][(2x - 3) + (x + 3)]$
 $\begin{matrix} [& a & - & b &] & [& a & + & b &] \end{matrix}$
 $= (2x - 3 - x - 3)(2x - 3 + x + 3)$
 $= (x - 6)(3x)$
 $= 3x(x - 6)$

Remarque :

Ne pas oublier, comme on l'a vu, qu'on peut aussi factoriser certaines expressions avec la distributivité et la formule :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

mais avec des expressions à la place de k , a ou b ...

Exemple :

Factoriser $A = (2x + 3)(x - 4) - (x - 4)(x + 1)$

$$\begin{aligned} A &= (2x + 3)(x - 4) - (x - 4)(x + 1) \\ &= (x - 4)[(2x + 3) - (x + 1)] \\ &= (x - 4)(2x + 3 - x - 1) \\ &= \mathbf{(x - 4)(x + 2)} \end{aligned}$$

VI. Une nouvelle série d'exercices : c'est ma tournée !

Exercice 1 :

Factoriser $A = (2x - 3)^2 - (x + 3)^2$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= x^2 - (4x + 5)^2 \\ &= (x - (4x + 5))(x + (4x + 5)) \\ &= (x - 4x - 5)(x + 4x + 5) \\ &= \mathbf{(-3x - 5)(5x + 5)} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

On pose $D = (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)^2$

- 1) Développer et réduire D.
- 2) Factoriser D.
- 3) Calculer D pour $x = 2$ et $x = -1$.
- 4) Résoudre l'équation $D = 0$.

Solution :

1.

$$\begin{aligned} D &= (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)^2 \\ &= 12x \times 2x - 12x \times 7 + 3 \times 2x - 3 \times 7 - [(2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2] \\ &\quad \text{double distributivité} \qquad \qquad \text{identité remarquable} \\ &= 24x^2 - 84x + 6x - 21 - (4x^2 - 28x + 49) \\ &= 24x^2 - 78x - 21 - 4x^2 + 28x - 49 \\ &= \mathbf{20x^2 - 50x - 70} \end{aligned}$$

2. (On utilise l'expression de départ pour factoriser sauf indication contraire...)

$$\begin{aligned} D &= (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)^2 \\ &= (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)(2x - 7) \\ &= (2x - 7)[(12x + 3) - (2x - 7)] \\ &= (2x - 7)(12x + 3 - 2x + 7) \\ &= \mathbf{(2x - 7)(10x + 10)} \end{aligned}$$

3.

- si $x = 2$: $D = (2x - 7)(10x + 10)$
$$\begin{aligned} &= (2 \times 2 - 7)(10 \times 2 + 10) \\ &= (4 - 7)(20 + 10) \\ &= -3 \times 30 \\ &= \mathbf{-90} \end{aligned}$$
- si $x = -1$: $D = 20x^2 - 50x - 70$
$$\begin{aligned} &= 20 \times (-1)^2 - 50 \times (-1) - 70 \\ &= 20 + 50 - 70 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

4.

On doit résoudre l'équation $(2x - 7)(10x + 10) = 0$
C'est une équation produit nul.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, donc :

$$\begin{aligned}(2x - 7)(10x + 10) = 0 &\text{ssi } 2x - 7 = 0 \quad \text{ou} \quad 10x + 10 = 0 \\ &\text{ssi } 2x = 7 \quad \text{ou} \quad 10x = -10 \\ &\text{ssi } x = \frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{10}{10} = -1\end{aligned}$$

Donc cette équation a deux solutions : $\frac{7}{2} = 3,5$ et -1

(on savait déjà que -1 était solution grâce à la question 3)

Exercice 3 :

- 1) Développer et réduire $(x - 1)^2$.
- 2) Justifier que $99^2 = 9\,801$ en utilisant la question 1.
- 3) Développer $(x - 1)(x + 1)$.
- 4) Justifier que $99 \times 101 = 9\,999$ en utilisant la question 3.

Solution :

1.

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 \\ &= \mathbf{x^2 - 2x + 1}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\text{On a : } 99^2 &= (100 - 1)^2 \\ &= 100^2 - 2 \times 100 + 1 \quad (\text{grâce à la question précédente}) \\ &= 10\,000 - 200 + 1 \\ &= \mathbf{9\,801}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\text{On a : } (x-1)(x+1) &= x^2 - 1^2 \\ &= \mathbf{x^2 - 1}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\text{On a : } 99 \times 101 &= (100 - 1)(100 + 1) \\ &= 100^2 - 1 \quad (\text{grâce à la question précédente}) \\ &= 10\,000 - 1 \\ &= \mathbf{9\,999}\end{aligned}$$

Exercice 4 :

On donne $E = (2x - 1)(x + 8) + (x + 8)^2$

1) Développer et réduire E.

2) Ecrire E sous la forme d'un produit de deux facteurs.

Solution :

1.

$$\begin{aligned}
 E &= (2x - 1)(x + 8) + (x + 8)^2 \\
 &= 2x \times x + 2x \times 8 - 1 \times x - 1 \times 8 + x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2 \\
 &\quad \text{double distributivité} \qquad \qquad \qquad \text{identité remarquable} \\
 &= 2x^2 + 16x - x - 8 + x^2 + 16x + 64 \\
 &= \mathbf{3x^2 + 31x + 56}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 E &= (2x - 1)(x + 8) + (x + 8)^2 \\
 &= (2x - 1)(x + 8) + (x + 8)(x + 8) \\
 &= (x + 8)[(2x - 1) + (x + 8)] \\
 &= (x + 8)(2x - 1 + x + 8) \\
 &= \mathbf{(x + 8)(3x + 7)}
 \end{aligned}$$

I. Introduction :

- Une équation est une égalité entre deux expressions littérales.

Par exemple voici une équation :

$$4x + 5 = 2x - 4$$

x est l'inconnue de l'équation.

Le membre de gauche (ou premier membre) de l'équation est $4x + 5$.

Le membre de droite (ou second membre) de l'équation est $2x - 4$.

Résoudre l'équation $4x + 5 = 2x - 4$ signifie répondre à la question : "Par quoi puis-je remplacer x dans cette égalité pour qu'elle soit vraie ?"

Les valeurs qu'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie sont appelées les solutions de l'équation.

Exemple:

Reprenons l'équation $4x + 5 = 2x - 4$

- Si on remplace x par 2 dans le membre de gauche on obtient :

$$4x + 5 = 4 \times 2 + 5 = 8 + 5 = 13$$

Et si on remplace x par 2 dans le membre de droite on obtient :

$$2x - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Donc en remplaçant x par 2 dans cette équation, cela ne fonctionne pas (on ne trouve pas la même chose des deux côtés du « = »), donc ***2 n'est pas une solution de cette équation.***

- Si on remplace x par -4,5 dans le membre de gauche on obtient :

$$4x + 5 = 4 \times (-4,5) + 5 = -18 + 5 = -13$$

Et si on remplace x par -4,5 dans le membre de droite on obtient :

$$2x - 4 = 2 \times (-4,5) - 4 = -9 - 4 = -13$$

Donc en remplaçant x par -4,5 dans l'équation cela « fonctionne » : on obtient bien la même chose des deux côtés du « = ». On en déduit que ***-4,5 est une solution de cette équation.***

Remarques :

- Il faut bien comprendre que lorsqu'on demandera de résoudre une équation, c'est à dire trouver la ou les solutions, si possible, de cette équation, on ne s'amusera pas à essayer des valeurs jusqu'à ce qu'on tombe sur une valeur qui fonctionne ! C'est pour cela qu'on va voir dans la partie suivante comment on fait pour trouver la ou les solutions d'une équation.
- Par contre, si on vous demande de vérifier qu'un nombre est ou n'est pas solution d'une équation, alors là oui on testera l'égalité pour voir si cela fonctionne comme nous avons fait précédemment.
- Les équations que nous voyons dans ce chapitre sont principalement des équations du premier degré à une inconnue. Cela signifie qu'il n'y a qu'une seule inconnue (une seule lettre) et qu'il n'y pas de carré ou de cube etc. pour cette inconnue.

Par exemple :

L'équation $2x - 3 = x + 7 - 4y$ est une équation du premier degré à une inconnue.

L'équation $3x^2 - 5x = 3 + 7x$ est une équation du second degré (on a du x au carré) à une inconnue.

II. Comment résoudre une équation ?

1) Modifier une équation sans changer ses solutions :

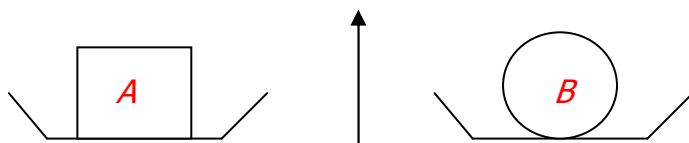
On a le droit d'utiliser les règles suivantes pour transformer l'équation de départ en une équation beaucoup plus simple.

(Le but étant d'arriver à la fin à : x (l'inconnue) = une certaine valeur.)

Pour résoudre une équation on va utiliser ces deux règles :

- Si on ajoute ou retranche aux deux membres d'une équation une même valeur non nulle, alors on ne modifie pas les solutions de l'équation.
- Si on multiplie ou divise les deux membres de l'équation par une même valeur non nulle, alors on ne modifie pas les solutions de l'équation.

Pourquoi a-t-on le droit de faire ça pour résoudre une équation ? Pour le comprendre, il suffit d'imaginer une balance à plateau (cela n'existe plus vraiment de nos jours mais bon...)



Sur une balance à plateau, comme ci-dessus, on a équilibre lorsque ses deux plateaux sont au même niveau (et la flèche verticale sur l'écran de cette balance.)

Si l'objet A est plus lourd que l'objet B, le plateau gauche sera plus bas que celui de droite et l'aiguille penchera vers la gauche.

Bon, maintenant si on ajoute 500 g sur le plateau de gauche et 500 g sur celui de droite, cela va-t-il changer quelque chose ? Non, les plateaux resteront à l'équilibre.

Si on retire 300 g à gauche et 300 g à droite, les plateaux resteront équilibrés.

Et si on prend deux objets A sur le plateau de gauche et deux objets A sur le plateau de droite, cela ne changera rien du tout non plus.

On peut donc imaginer une équation comme une balance à plateau : sur le plateau de gauche on a le membre de gauche et sur le plateau de droite on a le membre de droite.

Comme les plateaux sont équilibrés, on a l'égalité entre le membre de droite et le membre de gauche.

Et donc, comme on l'a vu avant, si on ajoute (ou retire) la même chose des deux côtés de l'équation ou qu'on multiplie (ou divise) ce qu'il y a sur les deux plateaux par un nombre non nul on aura toujours l'égalité...

2) Principe de résolution d'une équation :

Nous allons utiliser les deux règles précédentes de manière logique pour arriver à résoudre l'équation.

On va se débrouiller pour transformer notre équation (en x par exemple) jusqu'à ce qu'on obtienne (en gros) à la fin : $x = \dots$ un nombre
et dans ce cas là, on aura résolu l'équation puisque la solution sera donc le nombre derrière le « = »

Exemple 1 :

On veut résoudre l'équation $4x + 5 = 2x - 4$

a) S'il y a choses à développer et réduire dans les deux membres de l'équation, on le fait. Dans cet exemple on ne peut rien faire : $4x + 5$ ne se simplifie pas et $2x - 4$ ne se simplifie pas non plus.

b) Si l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation, on ajoute ou retranche un certain nombre de fois cette inconnue dans les deux membres pour qu'elle n'apparaisse que d'un côté de l'équation.

Dans cet exemple on voit que les $2x$ du second membre nous gênent. Donc on va retirer ces $2x$ dans les deux membres :

$$4x + 5 - 2x = 2x - 4 - 2x$$

Ce qui donne après réduction :

$$2x + 5 = -4$$

(Petit rappel : réduire une expression consiste à regrouper ce qui se regroupe. Par exemple : $3x + 7x = 10x$ ou $4x + 1 - 2x + 5 = 2x + 6$)

c) Si des termes constants apparaissent dans le membre où se situe l'inconnue, on retranche ce terme constant dans les deux membres.

Dans cet exemple on voit que 5 n'est pas du « bon côté » de l'équation. On retire donc 5 des deux membres :

$$2x + 5 - 5 = -4 - 5$$

Ce qui donne après réduction :

$$2x = -9$$

d) Une fois que l'inconnue n'apparaît que dans un seul membre et que le terme constant n'apparaît que dans l'autre membre de l'équation, il suffit de diviser par le coefficient de l'inconnue les deux membres de l'équation.

Dans cet exemple, on voit qu'on a $2x$, donc il suffit de diviser par 2 les deux membres de l'équation. Ce qui donne :

$$\frac{2x}{2} = \frac{-9}{2}$$

C'est à dire : $x = -4,5$

Cette équation a donc une seule solution : $x = -4,5$.

On peut aussi noter : $S = \{-4,5\}$

(Et on retrouve $-4,5$ valeur obtenue dans la première partie en « testant »)

Exemple 2:

Résoudre l'équation : $6(y - 3) = 2y + 10$

a) On développe le membre de gauche qui n'est pas encore développé et réduit :

(On développe avec quelque chose que vous connaissez normalement, la distributivité : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$)

$$6 \times y - 6 \times 3 = 2y + 10$$

$$6y - 18 = 2y + 10$$

b) On se débarrasse des $2y$ du membre de droite :

$$6y - 18 - 2y = 2y + 10 - 2y$$

$$4y - 18 = 10$$

c) On se débarrasse de -18 qui n'est pas du bon côté :

$$4y - 18 + 18 = 10 + 18$$

$$4y = 28$$

d) On divise les deux membres de l'équation par 4 :

$$\frac{4y}{4} = \frac{28}{4}$$

$$y = 7$$

Cette équation a donc pour solution $y = 7$.

On note $S = \{7\}$

Exercice :Résoudre les équations suivantes :

Résoudre l'équation :	Solution :
$-4x + 5 = 3x - 2$	$\begin{aligned} -4x + 5 &= 3x - 2 \\ -4x - 3x + 5 &= 3x - 2 - 3x \\ -7x + 5 &= -2 \\ -7x + 5 - 5 &= -2 - 5 \\ -7x &= -7 \\ \frac{-7x}{-7} &= \frac{-7}{-7} \\ x &= 1 \end{aligned}$ Cette équation a une solution : 1
$7x - 2 = -6$	$\begin{aligned} 7x - 2 &= -6 \\ 7x - 2 + 2 &= -6 + 2 \\ 7x &= -4 \\ \frac{7x}{7} &= \frac{-4}{7} \\ x &= -\frac{4}{7} \end{aligned}$ Cette équation a une solution : $-\frac{4}{7}$
$-5x + 2 = 5x$	$\begin{aligned} -5x + 2 &= 5x \\ -5x + 2 - 2 &= 5x - 2 \\ -5x &= 5x - 2 \\ -5x - 5x &= 5x - 2 - 5x \\ -10x &= -2 \\ \frac{-10x}{-10} &= \frac{-2}{-10} \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$ Cette équation a pour solution $\frac{1}{5}$

$\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{5}{2}x$	$\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{5}{2}x$ $\frac{2}{3}x + 1 - 1 = -\frac{5}{2}x - 1$ $\frac{2}{3}x = -\frac{5}{2}x - 1$ $\frac{2}{3}x + \frac{5}{2}x = -\frac{5}{2}x - 1 + \frac{5}{2}x$ $\frac{4}{6}x + \frac{15}{6}x = -1$ $\frac{21}{6}x = -1$ (Ici on doit diviser par $\frac{21}{6}$ ce qui revient à multiplier par $\frac{6}{21}$) $\frac{21}{6}x \times \frac{6}{21} = -1 \times \frac{6}{21}$ $x = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7}$ Cette équation a pour solution $-\frac{2}{7}$
$5,1 = 1 - y$	$5,1 = 1 - y$ $5,1 - 1 = 1 - y - 1$ $4,1 = y$ <i>(Ici j'ai laissé le y à droite mais ça ne change rien)</i> Cette équation a pour solution 4,1
$2,4 + t - 2,4 = 4,2$	$2,4 + t - 2,4 = 4,2$ $t = 4,2$ Cette équation a pour solution 4,2

$-\frac{2}{3} + x = \frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3} + x = \frac{7}{3}$ $-\frac{2}{3} + x + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}$ $x = \frac{9}{3} = 3$ Cette équation a pour solution 3
$\frac{3x}{5} = -\frac{1}{3}$	$\frac{3x}{5} = -\frac{1}{3}$ $\frac{3x}{5} \times \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \times \frac{5}{3}$ $x = -\frac{5}{9}$ Cette équation a pour solution $-\frac{5}{9}$
$5x + 10 = -2x + 24$	$5x + 10 = -2x + 24$ $5x + 10 + 2x = -2x + 24 + 2x$ $7x + 10 = 24$ $7x + 10 - 10 = 24 - 10$ $7x = 14$ $\frac{7x}{7} = \frac{14}{7}$ $x = 2$ Cette équation a pour solution 2
$7x + 5 = 9x + 3$	$7x + 5 = 9x + 3$ $7x + 5 - 9x = 9x + 3 - 9x$ $-2x + 5 = 3$ $-2x + 5 - 5 = 3 - 5$ $-2x = -2$ $\frac{-2x}{-2} = \frac{-2}{-2}$ $x = 1$ Cette équation a pour solution 1

$(x-2) + (x-3) = 0$	$(x-2) + (x-3) = 0$ <i>(Ici les parenthèses ne servent à rien en fait...)</i> $x - 2 + x - 3 = 0$ $2x - 5 = 0$ $2x - 5 + 5 = 0 + 5$ $2x = 5$ $\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$ $x = 2,5$ Cette équation a pour solution 2,5
---------------------	--

Remarque :

Dans certains cas, il se peut qu'il n'y ait aucune solution, plusieurs solutions ou même une infinité de solutions !

Exemples :

- L'équation $x + 2 = x - 3$ n'a aucune solution !

En effet, si on essaie de la résoudre :

$$\begin{aligned}
 x + 2 &= x - 3 \\
 x + 2 - x &= x - 3 - x \\
 2 &= 3
 \end{aligned}$$

On arrive à une égalité tout le temps fausse ! (2 ne sera jamais égal à 3 !)

Donc cela signifie qu'il n'y a aucune solution.

- De même l'équation $x^2 = -1$ n'a aucune solution (car un carré ne peut être négatif !)
- L'équation $2x = 2x$ a une infinité de solution car on aura toujours, quel que soit la valeur de x , $2x$ égal à... lui-même...
- De même l'équation $3 = 3$ a une infinité de solution car cette égalité est toujours vraie !

III. Résolutions de problèmes à l'aide d'une équation :

La résolution d'un problème à l'aide d'une équation s'effectue toujours plus ou moins de la même façon :

- Bien choisir l'inconnue, c'est à dire ce qu'elle représente dans l'énoncé. Généralement elle représente ce qu'on cherche dans le problème. Parfois on vous dit même dans l'énoncé à quoi correspondre cette inconnue... Ils sont sympas quand même de vous aider comme ça non ?
- Exprimer chaque information à l'aide de cette inconnue.

- Ecrire une égalité à partir de la lecture de l'énoncé pour mettre le problème en équation.
- Résoudre cette équation et répondre donc au problème posé.

Exemple 1 :

Un père dispose de 1600 € pour ses trois enfants. Il veut que l'aîné ait 200 € de plus que le deuxième et que le second ait 100 € de plus que le dernier.

Quelle somme doit il donner à chacun ?

Ici on cherche la somme reçue par chaque enfant. Si on connaît la somme reçue par n'importe lequel de ces enfants on peut facilement retrouver la somme reçue par les deux autres à partir de l'énoncé. Donc ici on peut prendre comme inconnue la somme reçue par n'importe lequel de ces enfants.

- Soit x la somme reçue par l'aîné.

Maintenant on exprime à l'aide de l'inconnue, si nécessaire, chaque information donnée dans l'énoncé.

- Somme reçue par le deuxième fils: $x - 200$
Somme reçue par le dernier fils : $x - 200 - 100 = x - 300$
(Le dernier reçoit 100 € de moins que le deuxième...)

Il ne reste plus qu'à écrire l'égalité obtenue à partir de l'énoncé, ce qui nous donnera l'équation à résoudre : la somme des trois enfants doit être égale à 1600 €.

- On doit donc résoudre l'équation : $x + x - 200 + x - 300 = 1600$

On résout cette équation :

$$\begin{aligned} x + x - 200 + x - 300 &= 1600 \\ 3x - 500 &= 1600 \\ 3x - 500 + 500 &= 1600 + 500 \\ 3x &= 2100 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{2100}{3} \\ x &= 700 \end{aligned}$$

Cette équation a donc pour solution 700.

Le premier enfant reçoit donc 700 €, le deuxième reçoit $700 - 200 = 500$ € et le dernier reçoit $500 - 100 = 400$ €

On peut vérifier que cela fonctionne : $700 + 500 + 400 = 1600$

Exemple 2 :

On choisit un nombre et on remarque que la somme de ce nombre et de son quintuple est égale à ce nombre augmenté de 12.

Quel est ce nombre ?

- Soit x le nombre choisi
- Quintuple du nombre choisi : $5x$

(Le quintuple d'un nombre est égal à ce nombre multiplié par 5...)

- On doit donc résoudre l'équation : $x + 5x = x + 12$

$$x + 5x = x + 12$$

$$6x = x + 12$$

$$6x - x = x + 12 - x$$

$$5x = 12$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{12}{5}$$

$$x = 2,4$$

Cette équation a donc pour solution : 2,4

Et le nombre choisi au départ est donc 2,4.

Exemple 3 :

Des élèves de troisièmes vont visiter une exposition. La visite se fait par petits groupes. On remarque que s'il y avait un élève en moins le nombre de groupes de 9 élèves serait le même que le nombre de groupes avec 8 élèves si on en avait 6 d'absents.

Combien d'élèves participent à cette sortie ?

Ici il faut en fait trouver combien cela ferait de groupes avec un élève en moins ou 6 élèves en moins.

- Soit x le nombre de groupes
- Nombre d'élèves à partir de la première indication : $9x + 1$
(x groupes de 9 élèves + 1 élève redonne le nombre d'élèves en tout...)
- Nombre d'élèves à partir de la seconde indication : $8x + 6$
(x groupes de 8 élèves + 6 élèves redonne le nombre d'élèves en tout...)
- On va donc résoudre l'équation : $9x + 1 = 8x + 6$

$$9x + 1 = 8x + 6$$

$$9x + 1 - 1 = 8x + 6 - 1$$

$$9x = 8x + 5$$

$$9x - 8x = 8x + 5 - 8x$$

$$x = 5$$

Donc cette équation a pour solution : 5

On peut donc réaliser 5 groupes de 9 élèves avec 1 élève en moins ou 5 groupes de 8 élèves avec 6 élèves en moins.

Donc le nombre d'élèves est égal à : $9 \times 5 + 1 = 45 + 1 = 46$

(ou $8 \times 5 + 6 = 40 + 6 = 46$)

Il y a donc 46 élèves participant à cette sortie.

IV. Quelques problèmes avec mise en équation :

Exercice 1 :

Anaïs a lu 252 pages d'un livre en 7 jours. Chaque jour elle a lu 4 pages de plus que la veille.

Combien de pages a-t-elle lues le premier jour et chaque jour suivant ?

Exercice 2 :

Jean a obtenu 18 ; 9 et 12 en devoir à la maison (coefficient 1) et 8 en devoir en classe (coefficient 3).

Combien doit-il avoir au prochain devoir en classe pour avoir 10 de moyenne ?

Exercice 3 :

Sur un parking on peut observer 50 véhicules en stationnement. Ces véhicules sont tous des motos (à 2 roues) ou des voitures (à 4 roues). On compte en tout 180 roues.

Quel est le nombre de voitures et de motos sur ce parking ?

Exercice 4 :

On a chargé dans un camion 3 types de caisses : des rouges qui pèsent chacune 60 kg, des bleues qui pèsent chacune 50 kg et des vertes qui pèsent chacune 40 kg. Il y a 3 fois plus de caisses bleues que de caisses rouges, et deux fois plus de caisses vertes que de bleues. Le chargement total du camion est de 900 kg.

Déterminer le nombre de chaque type de caisses.

Solution de l'exercice 1 :

- Soit x le nombre de pages lues le premier jour.
- Nombre de pages lues le deuxième jour : $x + 4$
Nombre de pages lues le troisième jour : $x + 8$
Etc.

- On doit donc résoudre l'équation :

$$x + x + 4 + x + 8 + x + 12 + x + 16 + x + 20 + x + 24 = 252$$

$$7x + 84 = 252$$

$$7x + 84 - 84 = 252 - 84$$

$$7x = 168$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{168}{7}$$

$$x = 24$$

Donc cette équation a pour solution : 24

Anaïs a lu 24 pages le premier jour, 28 le deuxième, 32 le troisième, etc.

Solution de l'exercice 2 :

- Soit x la note du prochaine devoir en classe :
- Moyenne avec cette prochaine note : $\frac{18 + 9 + 12 + 8X3 + 3x}{9}$
 $= \frac{63 + 3x}{9}$

- On doit donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{63 + 3x}{9} &= 10 \\ \frac{63 + 3x}{9} \times 9 &= 10 \times 9 \\ 63 + 3x &= 90 \\ 63 + 3x - 63 &= 90 - 63 \\ 3x &= 27 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{27}{3} \\ x &= 9\end{aligned}$$

Cette équation a donc pour solution : 9

Donc il devra avoir 9 pour obtenir 10 de moyenne.

Solution de l'exercice 3 :

- soit x le nombre de voitures
- Nombre de motos : $50 - x$
Nombre de roues pour les voitures : $4x$ (4 roues par voiture)
Nombre de roues pour les motos : $2 \times (50 - x)$ (2 roues par moto)
Nombre de roues en tout : $4x + 2(50 - x) = 4x + 2 \times 50 - 2x = 2x + 100$
- On doit donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}2x + 100 &= 180 \\ 2x + 100 - 100 &= 180 - 100 \\ 2x &= 80 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{80}{2} \\ x &= 40\end{aligned}$$

Cette équation a donc pour solution 40.

Il y a donc 40 voitures sur le parking et $50 - 40 = 10$ motos.

Solution de l'exercice 4 :

- Soit x le nombre de caisses bleues.

- Nombre de caisses rouges : $\frac{x}{3}$

Nombre de caisses vertes : $2x$

Poids des caisses bleues : $50x$

Poids des caisses rouges : $60 \times \frac{x}{3} = 20x$

Poids des caisses vertes : $2x \times 40 = 80x$

- On doit donc résoudre l'équation :

$$50x + 20x + 80x = 900$$

$$150x = 900$$

$$\frac{150x}{150} = \frac{900}{150}$$

$$x = 6$$

Cette équation a donc pour solution 6

Il y a donc 6 caisses bleues, $\frac{6}{2} = 3$ caisses rouges et $2 \times 6 = 12$ caisses vertes.

V. Equations produit nul :

On commence par une propriété toute simple et logique :

si on sait que $A \times B = 0$ alors (normalement !) vous devez tout de suite en déduire que soit $A = 0$ ou $B = 0$ (sinon le produit ne peut pas être nul !)

Autrement dit on a cette propriété :

- Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

« Si et seulement si » signifie que la propriété fonctionne dans les deux sens : si le produit est nul alors l'un des facteurs est nul / Si un des facteurs est nul alors le produit est nul.

On abrégera (vous avez le droit ! ! !) « si et seulement si » par « ssi »

Exemple :

Si $abc = 0$ alors soit $a = 0$ soit $b = 0$ soit $c = 0$

- Une équation produit nul est un « produit d'expressions égal à 0 ».

Par exemple :

- $(4x - 5)(2 - x) = 0$ est une équation produit nul
- $2y(x + 3)(x - 1) = 0$ est une équation produit nul
- $4(x - 2) + x - 3 = 0$ n'est pas une équation produit nul (*ce n'est pas un produit !*)
- $(-7x + 1)(x + 8) = -4$ n'est pas une équation produit nul (*c'est bien un produit mais non nul !*)

Comment résoudre une équation produit nul ?

Voici un exemple qui montre le raisonnement et la rédaction à utiliser. Je n'insisterai pas des plombs sur le pourquoi du comment, c'est tout le temps pareil...

Exemple 1 :

Résoudre l'équation : $(2x - 3)(x - 4) = 0$

On remarque que c'est une équation produit nul, alors on le dit !

C'est une équation produit nul.

Comme une équation produit nul est un produit qui doit être nul, on utilise la propriété citée au début de cette partie.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul, donc :

$$(2x - 3)(x - 4) = 0 \text{ ssi } 2x - 3 = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

C'est logique : pour que le produit des « trucs » entre parenthèses soit nul il faut que soit ce qu'il y a dans la première série de parenthèses est nul, soit ce qu'il y a dans la seconde série de parenthèses est nul, donc on doit résoudre (ici) deux équations en même temps. Voilà comment on fait :

$$\begin{aligned} (2x - 3)(x - 4) = 0 & \text{ ssi } 2x - 3 = 0 & \text{ ou } x - 4 = 0 \\ & \text{ssi } 2x - 3 + 3 = 0 + 3 & \text{ ou } x - 4 + 4 = 0 + 4 \\ & \text{ssi } 2x = 3 & \text{ ou } x = 4 \\ & \text{ssi } \frac{2x}{2} = \frac{3}{2} & \text{ ou } x = 4 \\ & \text{ssi } x = \frac{3}{2} & \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Donc cette équation a deux solutions : $\frac{3}{2}$ et 4

Remarque :

Vous aurez à résoudre ce genre d'équation même si au départ on ne voit pas que c'est une équation produit nul.

Exemples :

Résoudre les trois équations suivantes :

1) $(x + 2)(3x - 5) = 0$

C'est une équation produit nul.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, donc :

$$(x+2)(3x-5)=0 \quad \text{ssi } x+2=0 \text{ ou } 3x-5=0$$

$$\text{si } x=-2 \quad \text{ou } 3x=5$$

$$\text{ssi } x=-2 \quad \text{ou } \frac{3x}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\text{ssi } x=-2 \quad \text{ou } x=\frac{5}{3}$$

Cette équation a donc deux solutions : **-2 et $\frac{5}{3}$**

$$2) \quad x + 2(3x - 5) = 0$$

(ce n'est pas une équation produit nul ici !)

$$\text{on a : } x + 2(3x - 5) = 0$$

$$x + 2 \times 3x - 2 \times 5 = 0$$

$$x + 6x - 10 = 0$$

$$7x - 10 = 0$$

$$7x = 10$$

$$x = \frac{10}{7}$$

Cette équation a une seule solution : **$\frac{10}{7}$**

$$3) \quad -8x(2x-7)\left(1-\frac{x}{4}\right) = 0$$

C'est une équation produit nul.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, donc :

$$-8x(2x-7)\left(1-\frac{x}{4}\right) = 0 \quad \text{ssi} \quad -8x=0 \quad \text{ou } 2x-7=0 \quad \text{ou } 1-\frac{x}{4}=0$$

$$\text{ssi} \quad x=0 \quad \text{ou } 2x=7 \quad \text{ou } 1=\frac{x}{4}$$

$$\text{ssi} \quad x=0 \quad \text{ou } x=\frac{7}{2} \quad \text{ou } 4 \times \frac{x}{4} = 1 \times 4$$

$$\text{ssi } x=0 \quad \text{ou } x=\frac{7}{2} \quad \text{ou } x=4$$

Cette équation a donc 3 solutions : **$0 ; \frac{7}{2}$ (ou 3,5) et 4**

22- INEGALITES & INEQUATIONS

I. Inégalités :

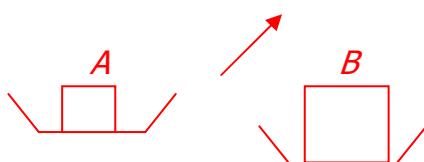
1) Les symboles utilisées dans les inégalités :

En dehors du symbole = utilisé pour exprimer une égalité, il existe quatre symboles pouvant exprimer une inégalité entre deux expressions :

- $<$: « est inférieur à »
ce symbole est utilisé lorsque le membre de gauche est strictement inférieur au membre de droite de l'inégalité.
On peut écrire par exemple que $2 < 3$ ou $-5 < 2$ mais on ne peut pas écrire $7 < 5$ (car 7 n'est pas inférieur à 5) ou $6 < 6$ (car 6 n'est pas strictement plus petit que lui-même.)
- $>$: « est supérieur à »
ce symbole est utilisé lorsque le membre de gauche est strictement supérieur au membre de droite de l'inégalité.
On peut écrire par exemple que $11 > 9$ mais pas que $3 > 6$ ou $13 > 13$.
- $\leq$: « est inférieur ou égal à »
ce symbole « mixe » ensemble les symboles $<$ et $=$.
On peut donc l'utiliser lorsque le membre de gauche est inférieur ou est à égal à celui de droite.
Par exemple on peut écrire $5 \leq 8$ ou $9 \leq 9$ mais pas $7 \leq 3$.
- $\geq$: « est supérieur ou égal à »
ce symbole « mixe » ensemble les symboles $>$ et $=$.
On peut donc l'utiliser lorsque le membre de gauche est supérieur ou est égal à celui de droite.
Par exemple on peut écrire $2 \geq 1$ ou $4 \geq 4$ mais pas $1 \geq 10$.

2) Règles utilisables dans une inégalité :

La première propriété que je vais vous donner est assez simple à comprendre si vous vous imaginez une balance à plateau comme celle-ci :



*Ici le poids B est plus lourd que le poids A
Ce qu'on pourrait noter : $A < B$*

Imaginez qu'on ajoute un poids de 100 g dans le plateau de gauche et un poids de 100 g dans le plateau de droite. Est-ce que cela changera quelque chose ? Non, le plateau de droite comportera toujours un poids plus lourd que celui de gauche. On aura alors :

$$A + 100 < B + 100$$

Imaginez plutôt qu'on retire 5 g du plateau de gauche et 5 g du plateau de droite. Cela ne changera rien du tout : le plateau de droite sera toujours le plus lourd des deux. On aura alors : $A - 5 < B - 5$

Ce qui nous donne donc cette propriété :

- Quand on a une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens en ajoutant ou en retranchant un même nombre (négatif ou positif) à ses deux membres.

Exemples :

Si $a < 2,6$ alors :

$$a + 3 < 2,6 + 3 \text{ c'est à dire } a + 3 < 5,6$$

$$a - 3 < 2,6 - 3 \text{ c'est à dire } a - 3 < -0,4$$

Si $B \geq 4$ alors :

$$B + 7 \geq 4 + 7 \text{ c'est à dire } B + 7 \geq 11$$

$$B - 2 \geq 4 - 2 \text{ c'est à dire } B - 2 \geq 2$$

Remarque :

Vous avez remarqué que cette règle était aussi valable dans une égalité puisque nous avons vu qu'elle s'appliquait pour les équations dans le chapitre précédent.

Il y a maintenant deux règles à connaître quand on multiplie (ou on divise) à gauche et à droite par un même nombre (non nul) dans une inégalité. Et, malheureusement, cela ne marche pas tout à fait de la même façon que pour une égalité...

On a $12 < 20$ (je vous assure que c'est vrai !) Regardons ce qui se passe lorsqu'on multiplie à gauche et à droite par le même nombre positif non nul :

$$12 \times 3 < 20 \times 3 \text{ (car on a bien } 36 < 60)$$

$$12 \times 5 < 20 \times 5 \text{ (car on a bien } 60 < 100)$$

On remarque que cela ne change rien au sens de l'inégalité.

Regardons ce qui se passe si on divise à gauche et à droite par le même nombre non nul positif :

$$12 : 2 < 20 : 2 \text{ (car on a bien } 6 < 10)$$

$$12 : 5 < 20 : 5 \text{ (car on a bien } 2,4 < 4)$$

On remarque que cela ne change rien au sens de l'inégalité.

On en déduit cette propriété :

- Quand on a une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens en multipliant ou en divisant ses deux membres par le même nombre positif non nul.

Exemples :

Si $x < 5$ alors $3 \times x < 3 \times 5$ c'est à dire $3x < 15$

Si $y > 11$ alors $\frac{y}{4} > \frac{11}{4}$

C'est maintenant que cela se « complique » un tout petit peu... mais pas trop !

On a $10 > 4$.

Regardons ce qui se passe en multipliant à gauche et à droite par le même nombre non nul NEGATIF :

On a par exemple $10 \times (-2) = -20$ et $4 \times (-2) = -8$ et $-20 < -8$

Donc $10 \times (-2) < 4 \times (-2)$ et on a donc changé le sens de l'inégalité !

Regardons ce qui se passe en divisant à gauche et à droite par le même nombre non nul NEGATIF :

On a par exemple : $10 : (-10) = -1$ et $4 : (-10) = -0,4$ et $-1 < -0,4$

Donc $10 : (-10) < 4 : (-10)$ et on a donc changé le sens de l'inégalité !

On en déduit cette propriété :

- Quand on a une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraire en multipliant ou en divisant ses deux membres par le même nombre **négatif** non nul.

Exemples :

Si $x < 5$ alors $-2 \times x > -2 \times 5$ c'est à dire $-2x > -10$

Si $y > 11$ alors $-\frac{y}{3} < -\frac{11}{3}$ (en divisant par -3 à gauche et à droite)

Exemples pour voir si vous avez tout bien compris :

- | | | |
|-------------------|-------|-----------------|
| 1) Si $x < 3$ | alors | $x - 7 < -4$ |
| 2) Si $x \leq 3$ | alors | $x + 2 \leq 5$ |
| 3) Si $y > -2$ | alors | $y - 3 > -5$ |
| 4) Si $y \geq -4$ | alors | $y + 3 \geq -1$ |
| 5) Si $x > 2$ | alors | $3x > 6$ |

6) Si $x \geq -1$	alors	$4x \geq -4$	
7) Si $y \leq 4$	alors	$\frac{y}{2} \leq 2$	
8) Si $y < -3$	alors	$\frac{y}{3} < -1$	
9) Si $t > -4$	alors	$-5t < 20$	<i>(On multiplie par un négatif !)</i>
10) Si $t \leq 2$	alors	$-\frac{t}{5} \geq -\frac{2}{5}$	<i>(On divise par un négatif !)</i>

II. Inéquations :

1) Introduction :

- Une inéquation est une inégalité entre deux expressions littérales utilisant une inconnue.

Exemples :

Voici quelques exemples d'inéquations :

$$4x - 3 < 17$$

$$-6x + 2 \geq 5 + 3x$$

$$4(t - 5) \leq \frac{t}{4}$$

En gros, une inéquation c'est comme une équation sauf qu'à la place du symbole = on aura comme symbole entre les deux expressions : < ou > ou ≤ ou ≥

2) Solutions d'une inéquation :

On retrouve les mêmes mots que pour les équations donc reportez au chapitre précédent pour les revoir plus en détail si besoin.

- Un nombre est solution d'une inéquation si en remplaçant l'inconnue par ce nombre l'inégalité de départ est vraie.

Exemples :

1) Le nombre 3 est-il solution de l'inéquation : $4x - 5 < x + 1$?

On remplace x par 3 dans le premier membre de l'inéquation :

$$4x - 5 = 4 \times 3 - 5 = 12 - 5 = 7$$

On remplace x par 3 dans le second membre :

$$x + 1 = 3 + 1 = 4$$

Et donc $7 < 4$, ce qui est faux.

Donc **3 n'est pas solution de l'inéquation**

2) Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation précédente ?

On a : $4x - 5 = 4 \times (-2) - 5 = -8 - 5 = -13$

Et : $x + 1 = -2 + 1 = -1$

On obtient : $-13 < -1$ qui est vrai

Donc **-2 est une solution de l'inéquation**

3) Les nombres 4, 10 et -3 sont-ils solutions de l'inéquation : $3x \geq x + 9$?

• On a : $3x = 3 \times 4 = 12$ et $x + 9 = 4 + 9 = 12$

Et $12 \geq 12$ est vrai, donc **4 est solution.**

• On a : $3x = 3 \times 10 = 30$ et $x + 9 = 10 + 9 = 19$

Et $30 \geq 19$ est vrai

Donc **10 est aussi une solution de l'inéquation.**

• On a : $3x = 3 \times (-3) = -9$ et $x + 9 = -3 + 9 = 6$

Et $-9 \geq 6$ est faux

Donc **-3 n'est pas une solution de l'inéquation.**

Remarques :

- On vient de voir dans ces exemples (avec l'exemple 3) qu'une inéquation n'aura pas qu'une seule solution quand elle admettra des solutions. Par exemple, l'inéquation $x > 7$ aura comme solution tous les nombres supérieurs strictement à 7. Il y aura donc une infinité de solutions.
- Comme pour les équations, on ne va pas « s'amuser » à tester tous les nombres existants pour déterminer les solutions d'une inéquation ! Dans les exemples précédents, on a juste testé quelques valeurs demandées. Pour trouver toutes les solutions d'une inéquation, on utilisera la méthode présentée un peu plus loin...

3) Représentation des solutions d'une inéquation :

Comme on vient de le voir, il y aura une infinité de solutions (sauf lorsqu'il n'y aura aucune solution) pour une inéquation. On ne va pas donner toutes les solutions en les écrivant, cela sera impossible. On va donc représenter les solutions graphiquement.

Dans ces exemples je vais vous expliquer comment on représente ces solutions en partant d'inéquations « bidons », c'est à dire « simples ».

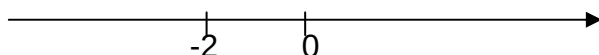
Exemples :

Donner les solutions de ces inéquations :

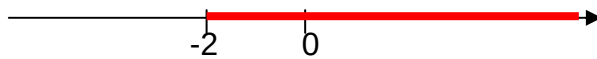
1) $x > -2$

Ici les solutions sont tous les nombres supérieurs à -2

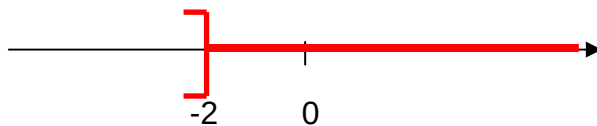
La méthode est toujours la même : on trace un mini axe en plaçant la valeur 0 et la valeur -2 (celle qui correspond à la valeur du dessus.)



On repasse sur l'axe (ou on hachure) en couleur les nombres supérieurs à -2 :



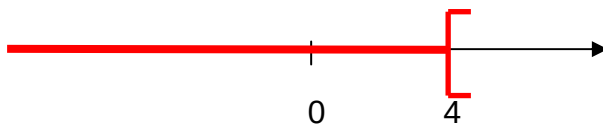
La partie rouge représente les nombres supérieurs à -2 . On doit encore ajouter un petit truc. Le nombre -2 (car le symbole est $>$ et pas $\geq$) ne fait pas partie des solutions. Quand le nombre ne fait pas partie des solutions on va placer un crochet à l'emplacement de ce nombre tourné dans le sens contraire de la partie coloriée. Si ce nombre fait partie des solutions on tourne le crochet vers la partie coloriée. Ce qui nous donne ici :



2) $x < 4$

Ici les solutions sont tous les nombres inférieurs à 4

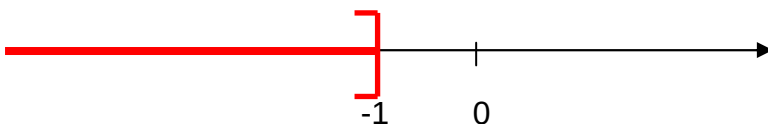
(4 n'est pas solution donc on tourne le crochet à l'opposé de ce qui est représenté en rouge...)



3) $x \leq -1$

Ici les solutions sont tous les inférieurs ou égaux à -1

(-1 est solution donc le crochet est tourné vers ce qui est représenté en rouge.)



4) $x \geq -\frac{3}{4}$

Ici les solutions sont tous les nombres inférieurs à 4

($-\frac{3}{4}$ est solution, donc le crochet est tourné... bon vous savez maintenant pas la peine que je redise !)



Remarque :

Il existe des inéquations n'ayant aucune solution, comme pour les équations. Par exemple l'inéquation $x^2 < 0$ (car un carré est toujours positif) ou l'inéquation : $x - 1 > x + 1$ (car un nombre diminué de 1 ne peut pas être plus grand que le même nombre augmenté de 1.)

Exercice : (Représentation de certaines solutions d'inéquations...)

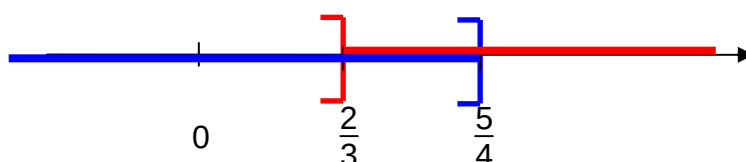
Représenter graphiquement les nombres x satisfaisant en même temps ces deux inéquations :

$$x > \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x \leq \frac{5}{4}$$

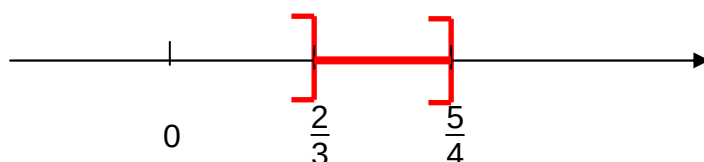
On va tracer à l'aide de deux couleurs les solutions de ces deux inéquations sur un même axe :

Il faut juste voir que $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$ pour les placer dans le bon ordre sur notre dessin.

En rouge les solutions de $x > \frac{2}{3}$ et en bleu les solutions de $x \leq \frac{5}{4}$:



On combine les deux ensembles : ce qui correspond à ce qu'on veut et c'est donc ce qui est bleu et rouge en même temps et voilà ce qu'on obtient :

**4) Résoudre une inéquation :**

En fait, résoudre une inéquation se fait de la même façon que lorsqu'on doit résoudre une équation. Il n'y aura que deux différences majeures ! D'abord, comme pour les équations, on fait des additions et des soustractions pour mettre les inconnues à gauche et les nombres tous seuls à droite. Ensuite on pense à ces deux petites différences avec les équations :

- *Les solutions d'une inéquation, lorsqu'elles existent, sont infinies, donc on pensera à faire le petit dessin qui montre quelles sont les solutions*
- *Contrairement à une équation, à la dernière étape il faut penser à changer le signe de l'inégalité si vous divisez (ou multipliez) par un négatif ! Si vous divisez par un positif (ou multipliez) là vous gardez le même signe !*

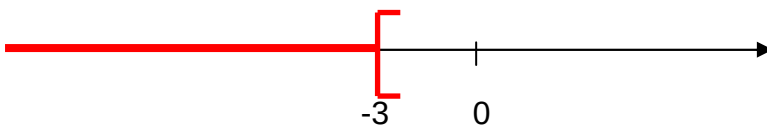
Exemples :

Résoudre ces inéquations :

1) $4x + 2 < x - 7$

$$\begin{aligned}4x + 2 &< x - 7 \\4x + 2 - x &< x - 7 - x \\3x + 2 &< -7 \\3x + 2 - 2 &< -7 - 2 \\3x &< -9 \\ \frac{3x}{3} &< \frac{-9}{3} \\x &< -3\end{aligned}$$

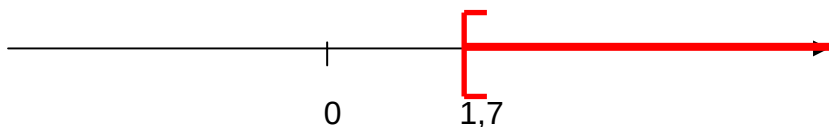
Les solutions sont donc les nombres inférieurs strictement à -3 .



2) $10x - 3 \geq 14$

$$\begin{aligned}10x - 3 &\geq 14 \\10x - 3 + 3 &\geq 14 + 3 \\10x &\geq 17 \\ \frac{10x}{10} &\geq \frac{17}{10} \\x &\geq 1,7\end{aligned}$$

Les solutions sont donc les nombres supérieurs ou égaux à $1,7$



3) $2(y - 4) \leq 5y + 1$

$$2(y-4) \leq 5y + 1$$

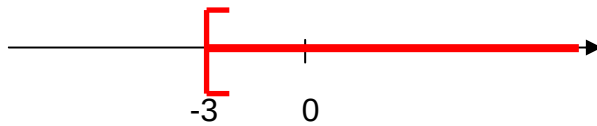
On développe avec la distributivité à gauche

$$\begin{aligned}2 \times y - 2 \times 4 &\leq 5y + 1 \\2y - 8 &\leq 5y + 1 \\2y - 8 - 5y &\leq 5y + 1 - 5y \\-3y - 8 &\leq 1 \\-3y - 8 + 8 &\leq 1 + 8 \\-3y &\leq 9\end{aligned}$$

On va diviser par -3 des deux côtés, donc on change le sens du symbole !

$$\begin{aligned}\frac{-3y}{-3} &\geq \frac{9}{-3} \\y &\geq -3\end{aligned}$$

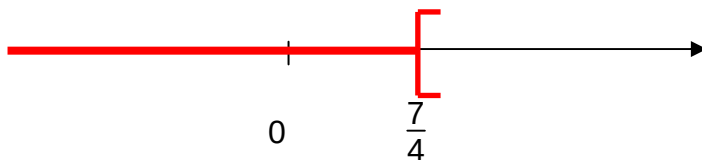
Les solutions sont donc les nombres supérieurs ou égaux à - 3



4) $-6x + 2 > -2x - 5$

$$\begin{aligned} 6x + 2 &> -2x - 5 \\ -6x + 2 + 2x &> -2x - 5 + 2x \\ -4x + 2 &> -5 \\ -4x + 2 - 2 &> -5 - 2 \\ -4x &> -7 \\ \frac{-4x}{-4} &< \frac{-7}{-4} \quad (\text{on divise par un négatif !!}) \\ x &< \frac{7}{4} \end{aligned}$$

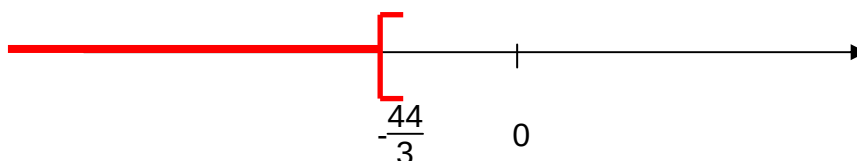
Les solutions sont donc les nombres inférieurs strictement à $\frac{7}{4}$



5) $4(x + 3) > 7(x + 8)$

$$\begin{aligned} 4(x + 3) &> 7(x + 8) \\ 4x + 4 \times 3 &> 7x + 7 \times 8 \\ 4x + 12 &> 7x + 56 \\ 4x + 12 - 12 &> 7x + 56 - 12 \\ 4x &> 7x + 44 \\ 4x - 7x &> 7x + 44 - 7x \\ -3x &> 44 \\ \frac{-3x}{-3} &< \frac{44}{-3} \\ x &< -\frac{44}{3} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les nombres inférieurs à $-\frac{44}{3}$



5) Résoudre un problème à l'aide d'une inéquation :

Pour résoudre des problèmes, il faudra souvent passer par une équation ou une inéquation. Pour savoir s'il s'agit de l'une ou de l'autre, il suffit de bien lire l'énoncé.

- Si dans l'énoncé vous cherchez un nombre tel que blablabla soit égal à blablabla, il faudra résoudre une équation.*
- Si dans l'énoncé vous cherchez un nombre tel que blablabla soit inférieur (ou supérieur ou supérieur ou égal etc.) à blablabla il faudra résoudre une inéquation.*

Dans tous les cas, on procède comme pour résoudre un problème pour une équation. On explique ce que va représenter l'inconnue, on exprime les informations de l'énoncé à partir de cette inconnue et on essaie de trouver l'inéquation qui correspond au problème posé.

Exemples de problèmes :

Problème 1 :

Une petite cuve contient 123 L d'eau. Elle se vide à la vitesse de 2 L par minute. Combien faut-il de temps au minimum pour que la cuve contienne moins de 40 L d'eau ?

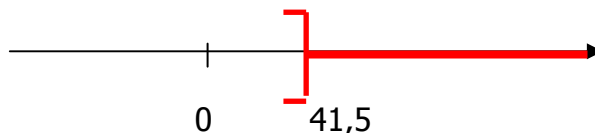
Soit x le nombre de minutes écoulées.

- Volume d'eau écoulee au bout de x minutes : $2x$
- Volume d'eau restant dans la cuve : $123 - 2x$

Donc on doit résoudre l'inéquation : $123 - 2x < 40$

$$\begin{aligned}123 - 2x &< 40 \\123 - 2x - 123 &< 40 - 123 \\-2x &< -83 \\\frac{-2x}{-2} &> \frac{-83}{-2} \quad (\text{on divise par } -2, \text{ négatif !}) \\x &> 41,5\end{aligned}$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres supérieurs strictement à 41,5



Donc il faudra qu'il se soit écoulé plus de 41,5 minutes, c'est à dire plus de 41 minutes et 30 secondes pour que la cuve contienne moins de 40 L d'eau.

Problème 2 :

Bob pense à un entier positif non nul x .

Il remarque que : $2x + 1 > 5x - 12$

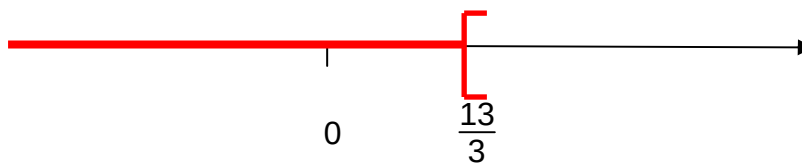
Ecrire la liste des nombres auxquels a pu penser Bob.

Soit x le nombre auquel pense Bob.

On doit résoudre l'inéquation : $2x + 1 > 5x - 12$

$$\begin{aligned}2x + 1 &> 5x - 12 \\2x + 1 - 1 &> 5x - 12 - 1 \\2x &> 5x - 13 \\2x - 5x &> 5x - 13 - 5x \\-3x &> -13 \\\frac{-3x}{-3} &< \frac{-13}{-3} \\x &< \frac{13}{3}\end{aligned}$$

Les solutions sont donc les nombres inférieurs à $\frac{13}{3}$



Comme $\frac{13}{3} \approx 4,3$ et que le nombre x doit être entier, positif et non nul, cela signifie que les nombres auxquels a pu penser Bob sont : **1, 2, 3 et 4**

Problème 3 :

Un camion pesant à vide deux tonnes doit passer sur un pont limité à 6 tonnes.

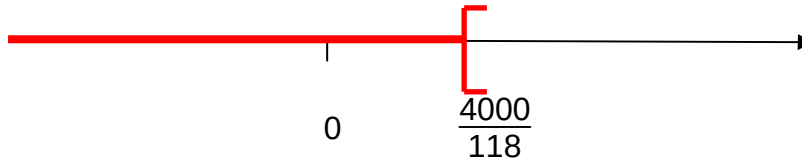
Combien de caisses de 118 kg peut-il transporter ?

D'abord $6\text{ t} = 6000\text{ kg}$.

- Soit x le nombre de caisses
- Poids du camion en kg : $2000 + 118x$
- On doit donc résoudre l'inéquation : $2000 + 118x < 6000$

$$\begin{aligned}2000 + 118x &< 6000 \\2000 + 118x - 2000 &< 6000 - 2000 \\118x &< 4000 \\\frac{118x}{118} &< \frac{4000}{118} \\x &< \frac{4000}{118}\end{aligned}$$

Les solutions sont donc les nombres inférieurs à $\frac{4000}{118}$



Comme $\frac{4000}{118} \approx 33,9$ et que le nombre de caisses est un nombre entier positif, alors le camion peut transporter ***au maximum 33 caisses***.

Problème 4 :

Un bureau d'études emploie 18 ingénieurs et 7 topographes. On envisage d'embaucher le même nombre x d'ingénieurs et de topographes. Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre de topographes soit au moins égal aux trois quarts du nombre d'ingénieurs ?

- Soit x le nombre d'ingénieurs (et aussi le nombre de topographes)
- Nombre de topographes après embauche : $7 + x$
- Nombre d'ingénieurs après embauche : $18 + x$
- On doit donc résoudre l'inéquation : $7 + x \geq \frac{3}{4}(18 + x)$

$$7 + x \geq \frac{3}{4}(18 + x)$$

$$7 + x \geq \frac{3}{4} \times 18 + \frac{3}{4}x$$

$$7 + x \geq 13,5 + \frac{3}{4}x$$

$$7 + x - 7 \geq 13,5 + \frac{3}{4}x - 7$$

$$x \geq 6,5 + \frac{3}{4}x$$

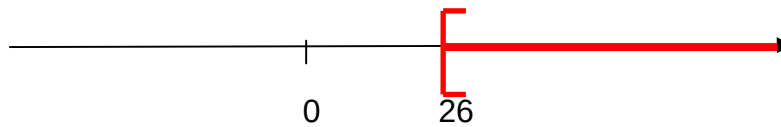
$$x - \frac{3}{4}x \geq 6,5 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x$$

$$\frac{1}{4}x \geq 6,5$$

$$\frac{1}{4}x \times 4 \geq 6,5 \times 4$$

$$x \geq 26$$

Les solutions de cette inéquation sont donc les nombres supérieurs ou égaux à 26.



Il faudra donc embaucher au moins **26 ingénieurs et 26 topographes.**

Problème 5 :

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux types de chaises, les unes vendues à 35€ pièce et les autres à 60€ pièce.

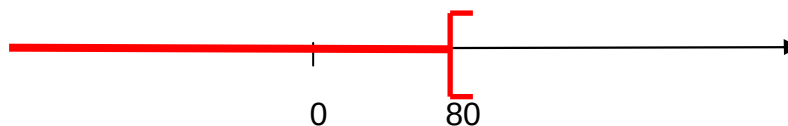
L'entreprise souhaite que le montant des ventes soit strictement supérieur à 7000€ par jour et elle veut fabriquer plus de chaises à 35€ que de chaises à 60€.

Combien doit-elle fabriquer de chaises à 35€ par jour ?

- Soit x le nombre de chaises à 35€
- Nombre de chaises à 60€ : $150 - x$
- Somme obtenue avec les chaises à 35€ : $35x$
- Somme obtenue avec les chaises à 60€ : $60(150 - x)$
- On doit donc résoudre l'inéquation : $35x + 60(150 - x) > 7000$

$$\begin{aligned}
 35x + 60(150 - x) &> 7000 \\
 35x + 60 \times 150 - 60x &> 7000 \\
 -25x + 9000 &> 7000 \\
 -25x + 9000 - 9000 &> 7000 - 9000 \\
 -25x &> -2000 \\
 \frac{-25x}{-25} &< \frac{-2000}{-25} \quad (\text{on divise par } -25 \text{ négatif !}) \\
 x &< \frac{2000}{25} \\
 x &< 80
 \end{aligned}$$

Les solutions de cette inéquation sont donc les nombres inférieurs strictement à 80.



Donc il faut déjà vendre moins de 80 chaises à 35€ pour dépasser les 7000€ de bénéfice.

Mais comme l'entreprise veut vendre plus de chaises à 35€ que de chaises à 60€, il faut que l'entreprise vende plus de 75 chaises à 35€ (car elle fabrique en tout 150 chaises par jour !)

Donc l'entreprise peut vendre **76, 77, 78 ou 79 chaises à 35€.**

I. Introduction :

- Une expérience aléatoire est une expérience qui respecte ces deux conditions :
 - 1) On connaît tous les résultats possibles de cette expérience.
 - 2) On ne peut pas prévoir à l'avance le résultat de cette expérience.

Exemples :

- 1) Lorsqu'on lance un dé à six faces classique, c'est à dire dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et qu'on note le résultat obtenu, c'est une expérience aléatoire.
- 2) Lancer une pièce et regarder si on obtient Pile ou Face est aussi une expérience aléatoire.
- 3) Tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes ou de 52 cartes et regarder la carte obtenue est une expérience aléatoire.
- 4) Tirer une boule dans une urne opaque (c'est à dire dont on ne voit pas ce qu'il y a l'intérieur) qui contient des boules de différentes couleurs et regarder quelle couleur est obtenue est aussi une expérience aléatoire.
- 5) Choisir un élève au hasard dans une classe est une expérience aléatoire.

Remarques :

- Aléatoire signifie « au hasard ».
- En probabilité, on va utiliser, forcément, beaucoup d'expériences aléatoires. Le but de ce chapitre est d'apprendre à calculer les « chances » qu'une expérience va donner tel ou tel résultat. Ce qui fait que même si on ne peut être sûr du résultat obtenu on pourra essayer de « parier » sur celui qui a le plus de chances de se produire.
- On utilisera souvent des jeux de cartes dans les exercices. Il faut faire la différence entre le contenu d'un jeu de 32 cartes et celui d'un jeu de 52 cartes... (Dans un jeu de 32 cartes il n'y a pas de 2, de 3, de 4, de 5 et de 6.)

- Dans une expérience aléatoire, les issues sont les résultats possibles de cette expérience.

Exemples :

- Lorsqu'on lance un dé à 6 faces classique, les issues sont : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
- Lorsqu'on joue à pile ou face, les issues sont Pile et Face.

- Lorsqu'on tire une boule au hasard dans une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules noires, et qu'on regarde la couleur de la boule tirée, les issues sont : Rouge, Vert et Noir.

Remarque :

On parle aussi parfois en probabilité d'univers des probables (ou des possible).

Par exemple, l'univers des possibles pour le lancer de dé est : $\{1,2,3,4,5,6\}$ et celui pour le jeu de pile ou face est $\{\text{Pile}, \text{Face}\}$

En fait c'est juste une autre façon de donner toutes les issues possibles.

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on regarde sa couleur (la couleur d'une carte correspond au symbole de cette carte, cela n'a rien à voir avec rouge ou noir...)

Donner l'univers des possibles de cette expérience aléatoire :

Les issues sont Carreau, Trèfle, Pique et Carreau.

L'univers des possibles est donc $\{\text{Carreau} ; \text{Trèfle} ; \text{Pique} ; \text{Carreau}\}$

II. Événements :

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, on peut alors donner et parler d'événements.

Un événement est en fait une phrase en français qui exprime ce qu'il peut se passer à la fin de l'expérience.

Exemples :

- Lorsqu'on lance à un dé à six faces, « Obtenir 4 » ou « Obtenir un chiffre impair » sont des événements.
- Lorsqu'on tire une carte au hasard, « Obtenir le roi de pique » ou « obtenir du trèfle » sont des événements.

Etc.

Par commodité, et pour éviter de réécrire toute la phrase d'un événement plusieurs fois dans un exercice, on peut choisir de donner un nom à ces événements avec une lettre majuscule.

On peut par exemple noter $A = \text{« Obtenir une dame »}$ et parler ensuite de l'événement A dans la suite de l'exercice.

Remarque :

Il existe différents types d'événements qu'il faut impérativement connaître car ils seront importants lorsque nous calculerons des probabilités.

- Un événement élémentaire est un événement associé à une des issues de l'expérience. Il y a donc autant d'événements élémentaires que d'issues possibles.

Exemples :

- Lorsqu'on lance un dé à six faces « classique » nous avons vu qu'il y avait 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Les événements élémentaires de cette expérience aléatoire sont donc :
« Obtenir 1 », « Obtenir 2 », « Obtenir 3 », « Obtenir 4 », « Obtenir 5 » et « Obtenir 6 ».
- Lorsqu'on joue à pile ou face, les événements élémentaires sont :
« Obtenir Pile » et « Obtenir Face »
- Si on choisit une lettre au hasard dans le mot « ERRER » il y a deux événements élémentaires :
« Obtenir E » et « Obtenir R ».

- Un événement impossible est un événement qui ne se réalisera jamais (qui sera toujours faux) à l'issue de l'expérience aléatoire.

Exemples :

- « Obtenir 7 » quand on lance un dé à six faces est un événement impossible car on ne pourra jamais obtenir 7 si les faces sont numérotées de 1 à 6.
- « Obtenir la lettre H » quand on choisit une lettre au hasard dans le mot « ERRER » est un événement impossible.
- « Obtenir une girafe » est un événement impossible dans la plupart des expériences aléatoires... à part si on choisit un animal au hasard dans un zoo... Par contre, si on vous demande de donner un événement impossible dans une expérience aléatoire, essayer de donner un exemple en rapport avec l'expérience...

- Un événement certain est un événement qui se réalisera toujours (qui sera toujours vrai) à l'issue de l'expérience aléatoire.

Exemples :

- L'événement « Obtenir une lettre » quand on choisit une lettre au hasard dans le mot « ERRER » est un événement certain car on obtiendra forcément une lettre...
Je ne vois pas trop ce qu'on pourrait obtenir d'autre.
- L'événement « Obtenir un nombre inférieur à 10 » est un événement certain de l'expérience aléatoire du lancer de dé.

Remarque :

- Même si nous n'avons pas encore vu comment on calcule des probabilités, vous devez comprendre déjà que si on vous laisse le choix de parier sur le résultat final d'une expérience aléatoire, il vaut mieux parier sur un événement certain qu'un événement impossible... A mon avis vous aurez plus de chances de gagner...
- Maintenant nous allons voir des noms donnés à des événements pris deux par deux. Ils sont aussi importants pour le calcul des probabilités.

- Deux événements incompatibles sont des événements qui ne peuvent se réaliser en même temps. Autrement dit, si l'un est vrai l'autre doit être faux.

Exemples :

- Si on lance un dé à 6 faces les événements « obtenir 1 » et « obtenir 3 » sont incompatibles. On ne peut pas avoir 1 et 3 en même temps ! De même les événements « Obtenir un chiffre pair » et « Obtenir 5 » sont incompatibles... Si on obtient un chiffre pair on ne peut avoir 5 en même temps.
- Si on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes ou de 52 cartes (pour cet exemple cela n'a aucune importance), les événements « Obtenir un Roi » et « Obtenir du Cœur » ne sont pas incompatibles car si on tire comme carte le Roi de Cœur, ces deux événements sont réalisés.

- Deux événements contraires sont des événements tels que si l'un des deux est vrai l'autre est faux, et inversement.

Autrement dit il y en a toujours un des deux qui est vrai et l'autre qui est faux à la fin de l'expérience aléatoire.

Exemples :

- Si on lance un dé à six faces classique, les événements « obtenir un chiffre pair » et « obtenir un chiffre impair » sont contraires. Si l'un est vrai l'autre est forcément faux et inversement.
- Si dans une urne on a placé des boules rouges et des boules blanches et qu'on en tire une au hasard pour regarder sa couleur, les événements « obtenir du rouge » et « obtenir du blanc » sont contraires. Si la boule est rouge elle ne peut être blanche, et inversement.

Remarques :

- Deux événements contraires sont forcément incompatibles car ils ne peuvent être vrais en même temps.

- L'inverse est faux : deux événements incompatibles ne sont pas forcément contraires car ils peuvent être faux tous les deux en même temps.
- Il faut faire attention à l'écriture en français des événements. Par exemple l'événement « obtenir du cœur et un roi » est réalisé seulement si on tire comme carte au hasard le roi de cœur ; par contre l'événement « obtenir du cœur ou un roi » est réalisé si on tire un roi ou du cœur. Donc attention à l'utilisation des mots « et » et « ou » dans l'écriture des événements.

III. Probabilité d'un événement :

Calculer la probabilité d'un événement signifie déterminer les chances que cet événement se réalise. Les probabilités sont pratiques dans des jeux où on peut estimer ses chances pour savoir s'il vaut mieux miser ou s'abstenir, comme par exemple au poker.

- On appelle probabilité d'un événement A le nombre noté $p(A)$ qui est égal à :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Remarques :

- Une probabilité se calcule donc à l'aide d'une fraction. Généralement on garde l'écriture fractionnaire comme réponse, mais on essaie quand même de la simplifier au maximum. Cela rend la probabilité plus claire à comprendre. Par exemple si on trouve $p(A) = \frac{3}{7}$ cela signifie simplement qu'on a 3 chances sur 7 que l'événement A se produise.
- Lorsqu'on calcule des probabilités, il faudra bien faire attention si on précise qu'il y a quelque chose de truqué dans l'énoncé... On le verra dans les exemples et exercices futurs.

Exemples :

- Si on lance une pièce non truquée, on a facilement :
 $P(\text{« Obtenir pile »}) = \frac{1}{2}$ et $p(\text{« obtenir face »}) = \frac{1}{2}$
 Car il y a un seul pile sur les deux côtés de la pièce et un seul face.
- Si on lance un dé classique non truqué, on a :
 $P(\text{« Obtenir 1 »}) = \frac{1}{6}$ car une seule face du dé sur les 6 porte le numéro 1.
- Si on place dans une urne opaque 4 boules rouges et 3 boules noires indiscernables au touché, et qu'on en tire une au hasard pour regarder sa couleur, on a :

$$P(\text{« Obtenir une boule rouge »}) = \frac{4}{7}$$

Car il y a 4 boules rouges en tout dans l'urne et 7 boules en tout dans l'urne.

- Si on tire une lettre au hasard dans le mot « METTRE », on a :

$$P(\text{« Obtenir M »}) = \frac{1}{6} \quad (\text{Un seul M sur les 6 lettres du mot})$$

$$P(\text{« Obtenir T »}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{« Obtenir une consonne »}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{« Obtenir M ou E »}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{Trois lettres sur 6 sont un M ou un E})$$

Remarques :

- Un événement impossible a une probabilité nulle car il n'y a aucune chance qu'il se produise. Si on lance un dé à 6 faces classique, on a par exemple :

$$P(\text{« Obtenir 7 »}) = \frac{0}{6} = 0$$

- Un événement certain a une probabilité égale à 1 car il se produit à chaque fois. Si on lance un dé à 6 faces classique, on aura par exemple :

$$P(\text{« Obtenir un nombre inférieure à 10 »}) = \frac{6}{6} = 1$$

Car les 6 issues du dé sont des nombres inférieures à 10

La définition qui suit est importante car elle revient souvent dans les exercices.

- Des événements sont équiprobables s'ils ont la même probabilité.

Exemple :

Lorsqu'on lance un dé non truqué, les 6 événements élémentaires « Obtenir 1 », ..., « Obtenir 6 » sont équiprobables car ils ont tous pour probabilité $\frac{1}{6}$.

De même lorsqu'on lance une pièce non truquée, les événements « Obtenir Pile » et « Obtenir Face » sont équiprobables car ils ont tous les deux $\frac{1}{2}$ comme probabilité.

Quelques propriétés utiles en probabilités :

- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors on a :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Remarque :

Cette propriété est assez facile à comprendre. Si, par exemple, on place 5 boules vertes dans une urne, 3 boules bleues et 3 boules rouges, qu'on en tire une au hasard et qu'on regarde sa couleur, alors on a :

$$P(\text{« Obtenir du vert »}) = \frac{5}{11} \text{ (car il y a 11 boules en tout)}$$

$$P(\text{« Obtenir du bleu »}) = \frac{3}{11}$$

$$P(\text{« Obtenir du vert ou du bleu »}) = \frac{8}{11}$$

On a bien :

$P(\text{« Obtenir du vert ou du bleu »}) = P(\text{« Obtenir du vert »}) + P(\text{« obtenir du bleu »})$
car les événements « obtenir du bleu » et « obtenir du vert » sont incompatibles.
(On ne peut pas avoir les deux couleurs en même temps.)

- Si A et B sont deux événements contraires, alors on a :

$$P(A) + P(B) = 1$$

Exemple :

Choisissons au hasard une lettre dans le mot « BISCOTTE ».

On a :

$$P(\text{« Obtenir une voyelle »}) = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad P(\text{« Obtenir une consonne »}) = \frac{5}{8}$$

$$\text{Et } \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Ce qui est normal car les événements « obtenir une voyelle » et « obtenir une consonne » sont contraires (on a soit une consonne soit une voyelle... je ne vois pas trop ce qu'on pourrait avoir d'autre...)

Remarque :

Cette propriété est pratique pour trouver la probabilité d'un événement si on connaît la probabilité de son événement contraire.

Si par exemple on sait qu'à un jeu on a 5 chances sur 17 de gagner alors :

$$P(\text{« Perdre au jeu »}) = 1 - P(\text{« Gagner au jeu »})$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{5}{17} \\ &= \frac{17}{17} - \frac{5}{17} \\ &= \frac{12}{17} \end{aligned}$$

On a donc 12 chances sur 17 de perdre à ce jeu.

On termine avec une propriété toute simple qui vient d'un résultat donné précédemment.

On sait qu'un événement impossible a une probabilité nulle.

On sait qu'un événement certain a une probabilité égale à 1.

On en déduit donc :

- Quel que soit l'événement A, on a forcément : $0 \leq P(A) \leq 1$

Donc si jamais en exercice vous trouvez qu'un événement a une probabilité égale à $\frac{27}{21}$ ou $-\frac{1}{3}$, vous feriez mieux de vérifier vos calculs...

IV. Expériences aléatoires successives :

Exemple introductif :

On lance une pièce non truquée 3 fois de suite et on note à chaque fois et dans l'ordre ce qu'on obtient.

Par exemple, si on obtient Pile, Face puis Pile on notera (pour gagner du temps car le temps c'est de l'argent) : PFP

On considère les événements suivants :

A = « Obtenir 3 Piles »

B = « Obtenir une seule fois Face »

C = « Obtenir dans l'ordre Pile, Face et Face »

D = « Obtenir au moins 2 Piles »

E = « Obtenir une fois Pile et une fois Face »

Le but est de calculer la probabilité de ces événements...

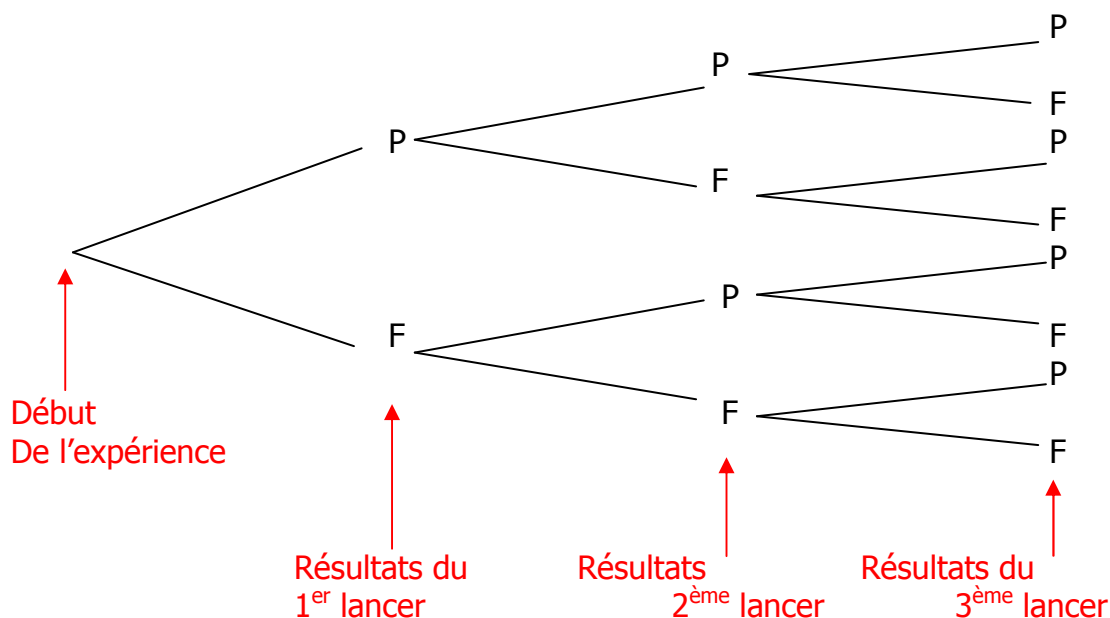
(Là je peux voir la tête de certains qui se demandent bien comment faire...)

Pour calculer les probabilités dans ce genre d'expérience aléatoire qu'on répète plusieurs fois, il faut utiliser ce qu'on appelle un arbre :



(Non pas un arbre comme celui-ci même si vous pouvez admirer mes talents artistiques au passage...)

Pour faire un arbre en probabilité, en fait c'est assez simple. On va se déplacer de la gauche vers la droite du début de l'expérience à la fin. A chaque expérience on va dessiner des branches qui donnent les issues possibles de l'expérience. Voilà ce que ça donne pour l'expérience avec la pièce :



Remarque :

Lorsque vous devrez faire un arbre, il ne faut pas faire un dessin trop petit, il faut que les résultats de chaque lancer soient bien alignés verticalement et qu'il soit bien lisible. On verra, même si ici ce n'est pas nécessaire, qu'il faudra souvent ajouter des fractions sur chaque branche.

Il faut comprendre comment on interprète cet arbre. Quand on se déplace de la gauche vers l'extrême droite, on suit un « chemin ». Sur chaque chemin on va suivre de « branches ». Au bout de chaque branche on ajoute les branches qui nous donnent les issues possibles de l'expérience. Ici à chaque embranchement on ajoute à chaque fois deux branches car il y a à chaque fois deux issues possibles : Pile (P) ou Face (F).

Pour calculer les probabilités dans cette expérience, c'est assez simple ici. Si on regarde à droite de l'arbre on compte 8 branches. Cela signifie qu'il y a 8 chemins qui nous permettent d'aller de la gauche de l'arbre à sa droite.

(Cela signifie qu'il y a 8 « combinaisons » possibles dans cette expérience...)

Prenons l'événement A (« Obtenir 3 Piles ») .

Cherchons les chemins qui nous permettent d'avoir 3 piles... Si vous êtes observateurs, vous verrez qu'il n'y en a qu'un : celui du « haut » : en suivant le chemin on voit qu'on a P, P et P.

Donc il y a un seul chemin sur les 8 possibles qui nous permettent d'avoir 3 piles.

Conclusion :

$$P(A) = \frac{1}{8} \text{ et c'est terminé !}$$

En faisant pareil (c'est à dire en comptant les chemins qui permettent d'obtenir l'événement choisi), on trouve :

- Pour l'événement B il y a 3 chemins possibles avec un seul F,

$$\text{donc } P(B) = \frac{3}{8}$$

- Pour l'événement C il n'y a qu'un seul chemin codé PFF

$$\text{Donc } P(C) = \frac{1}{8}$$

- Pour l'événement D il y a 4 chemins *(avec 2 « Pile » ou 3 « Pile »)*

$$\text{Donc } P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- Comme il y a 3 lancers, il ne peut y avoir qu'une seule fois Pile et une seule fois Face, donc :

$$P(E) = 0$$

(Et E est donc un événement impossible...)

Exemple 2 :

On lance un dé à 6 faces non truqué.

Si on obtient 1 ou 2 on tire au hasard une bille dans un sac opaque qui contient une bille rouge et une bille noire.

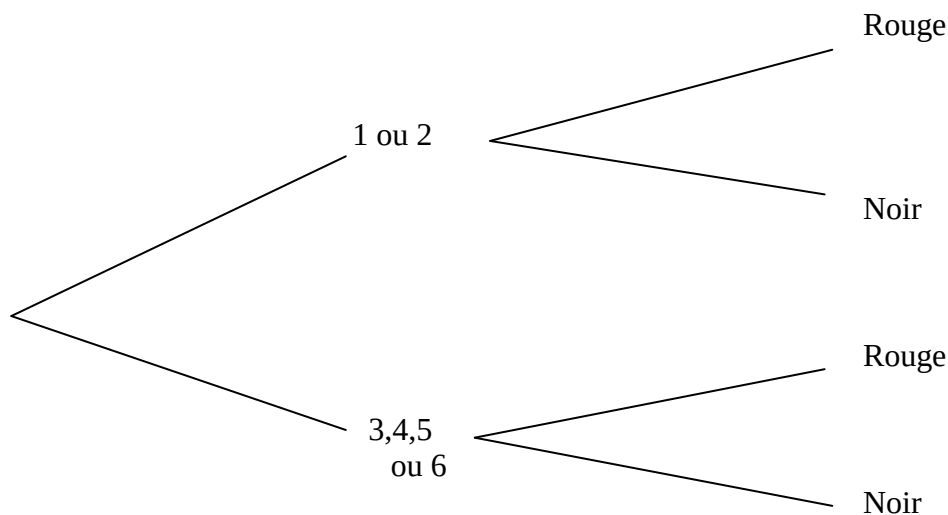
Si on obtient un chiffre supérieur à 2, on tire au hasard une bille dans un second sac opaque qui contient 1 bille rouge et 4 billes noires.

On gagne à ce jeu si on obtient une bille rouge.

Dessiner l'arbre correspondant à cette expérience :

Alors ici, l'erreur à ne pas faire est de faire un arbre avec 6 branches au départ pour représenter le lancer de dé... Pourquoi ? Parce que si vous lisez l'énoncé correctement, il n'y a que deux cas qui nous intéressent pour cette expérience aléatoire : soit on obtient un chiffre supérieur à 2 soit un autre chiffre. De même pour les billes : seule la couleur nous intéresse...

Voici l'arbre qu'on obtient :



Vous remarquez que cet arbre est beaucoup plus simple que celui que vous avez peut-être essayé de faire par vous-mêmes...

Maintenant on va voir comment on utilise cet arbre pour calculer les probabilités des événements ci-dessous :

A = « Obtenir 1 ou 2, et une bille noire »

B = « Gagner à ce jeu »

C = « Obtenir une bille noire »

Attention, si j'avais mis des événements sur un chiffre précis du dé (comme « obtenir 3 et une bille rouge ») il aurait fallu faire un arbre plus précis. Donc il faut toujours lire un énoncé en entier avant de faire un arbre.

Pour calculer les probabilités de ces événements à partir de l'arbre, il faut déjà le pondérer. Ce mot barbare signifie qu'il faut marquer sur chaque branche la probabilité que ça arrive.

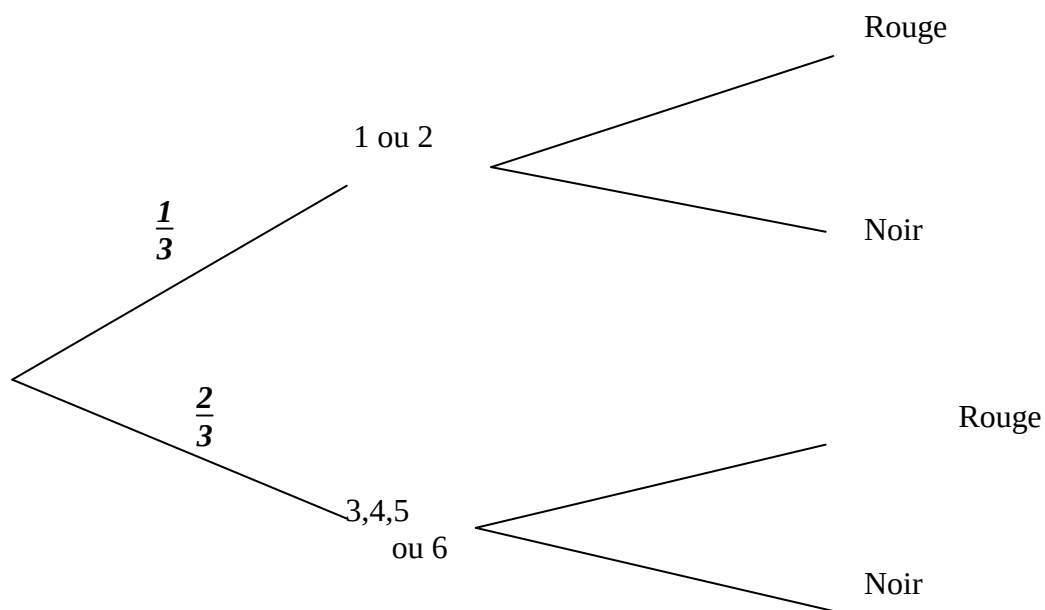
(Je vous remets l'arbre à chaque fois que j'aurai expliqué...)

Par exemple, au départ on aura soit 1 ou 2 avec le dé, soit 3,4,5 ou 6. La probabilité d'avoir 1 ou 2 est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

La probabilité d'avoir autre chose est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(On aurait pu facilement savoir que c'était $\frac{2}{3}$ car l'autre branche a $\frac{1}{3}$ comme probabilité et ces deux événements sont contraires.)

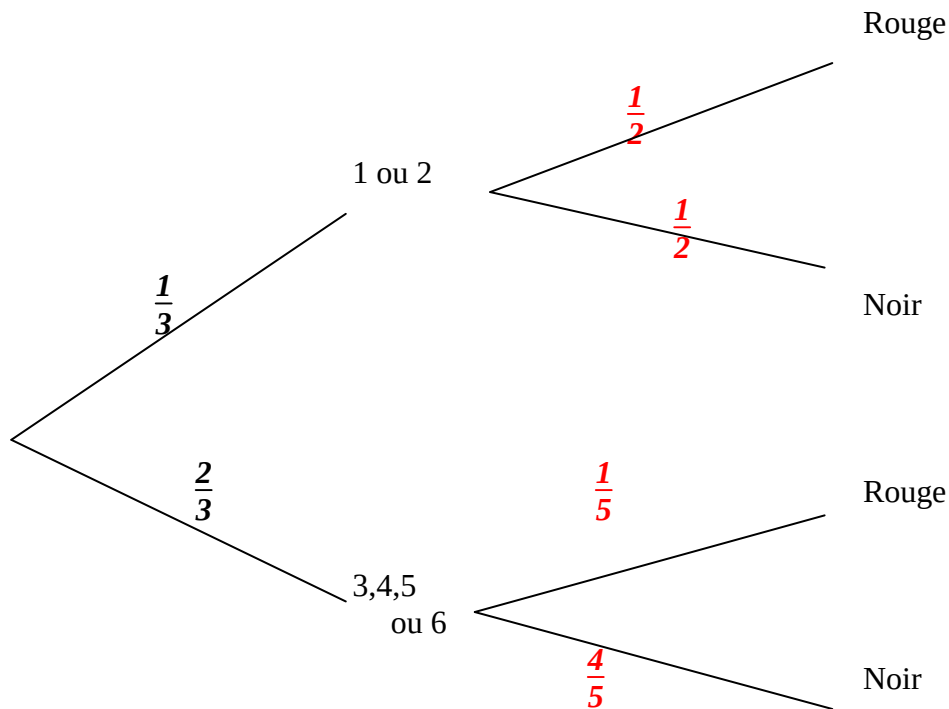
(On ajoute ces deux probabilités sur les branches correspondantes, c'est à dire qu'on les marque sur la branche correspondante :)



(En fait quand on met $\frac{1}{3}$ sur la branche ça veut dire que 1 branche sur 3 aurait emmené au même embranchement et évite d'avoir à dessiner toutes les branches inutiles...)

Si on obtient 1 ou 2 avec le dé on tire une bille dans un sac qui contient 1 bille rouge et 4 billes noires. Donc a 1 chance sur 5 d'avoir du rouge et 4 chance sur 5 d'avoir du noir.

(On complète alors l'arbre avec ces deux probabilités.)



Si on obtient 3,4,5 ou 6 avec le dé on tire une bille dans un sac qui contient 1 bille rouge et 1 bille noire. Donc a 1 chance sur 2 d'avoir du rouge et 1 chance sur 2 d'avoir du noir.

(On complète l'arbre avec ces deux probabilités.)

Pour calculer la probabilité d'un événement à partir d'un arbre on retient ces deux règles expliquant « comment ça marche » :

- Sur un chemin qui correspond à l'événement on doit multiplier les fractions qu'on rencontre
- S'il y a plusieurs chemins correspondant à un événement, on doit ajouter les nombres trouvés pour chaque chemin

On calcule les événements des événements donnés avant :

Pour A = « Obtenir 1 ou 2, et une bille noire »

Un seul chemin correspond à cet événement *(j'espère que tout le monde arrive à le repérer.)*

On a donc, d'après la règle donnée avant :

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{(On multiplie les probabilités des deux branches du chemin...)}$$

Pour B = « Gagner à ce jeu »

Pour gagner il faut obtenir une bille rouge. Il y a deux chemins permettant d'obtenir une bille rouge. On doit donc ajouter les nombres obtenus en multipliant les fractions sur chaque branche de ces chemins :

$$P(B) = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{1^{\text{er}} \text{ chemin}} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}}_{2^{\text{ème}} \text{ chemin}} = \frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{5}{30} + \frac{4}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

On a donc moins d'un chance sur 2 de gagner à ce jeu... évitez d'y jouer trop souvent...

C = « Obtenir une boule rouge »

Ici, c'est simple : l'événement C est l'événement contraire de l'événement B précédent, donc :

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Remarque :

On aurait pu aussi pondérer l'arbre dans l'exemple du lancer de pièces. Mais cela ne servait à rien car chaque branche avait une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ à chaque fois

La preuve (en regardant l'arbre de cette expérience)

Pour calculer la probabilité d'avoir Pile – Pile – Pile on aurait fait avec la méthode que je viens de vous donner :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Résultat qu'on avait bien trouvé en comptant directement le nombre de chemins correspondants à cet événement...

V. Lien avec les statistiques :

- 1) On va prendre un dé non truqué et on va le lancer plusieurs fois de suite. On comptera à chaque fois combien de fois chaque résultat (de 1 à 6) est sorti.

Voici le tableau qu'on obtient. On a noté seulement les lignes pour les résultats obtenus après 10, 50, 100, 2000 et 100000 lancers :

FACES OBTENUES

Nombre de lancers :	1	2	3	4	5	6
10	1	2	1	0	3	3
50	9	8	9	4	12	8
100	21	15	21	11	17	15
2000	359	327	345	327	326	316
100000	16749	16584	16824	16784	16505	16554

On remarque que sur un nombre de lancers peu élevés (moins de 100), on pourrait penser que le dé est truqué car deux faces (le 1 et le 3) sortent plus souvent que le 4 (presque deux fois plus.)

Par contre, dès que le nombre de lancers devient très élevé, chaque face apparaît avec un nombre de fois presque identique (autour de 16700 pour 100000 lancers.)

On remarque aussi que si on calcule la fréquence d'apparition du 1 (on peut faire pareil pour les autres faces), on trouve :

$$\frac{16749}{100000} = 0,16749$$

et que : $P(\text{« obtenir 1 »}) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$

Donc la probabilité d'obtenir 1 n'est que la fréquence d'apparition de la face 1 si on lançait le dé une infinité de fois.

2) On place dans une urne des billes rouges, bleues et vertes. On tire plusieurs fois de suite une bille dans l'urne et on la remet à chaque tirage dans l'urne. On compte le nombre de fois où une couleur apparaît :

On place les résultats dans ce tableau (comme pour le 1^{er} exemple, on ne met que les lignes après 10, 50, 100, 2000 et 100000 tirages) et on va essayer de trouver la composition à l'intérieur de l'urne :

COULEUR OBTENUE

Nombres de lancers	Rouge	Bleu	Vert
10	2	4	4
50	20	17	13
100	46	31	23
2000	1166	553	281
100000	57035	28753	14212

Au bout de 10 tirages on a « l'impression » qu'il y a moins de rouge que d'autres couleurs... mais le nombre de tirages est trop petit pour se faire une idée... C'est comme si vous lanciez un dé 2 fois de suite et que vous obteniez uniquement que des 6 pour ces deux tirages. Cela ne veut pas dire que le dé est truqué, c'est juste un coup de « bol ».

A partir de 100 tirages on voit que le rouge apparaît plus que les autres couleurs.

A partir de 2000 tirages on voit que le vert apparaît moins souvent que les autres couleurs.

Pour 10000 tirages (ce qui est déjà beaucoup), si on compare le nombre de fois où une couleur est sortie par rapport à une autre on remarque que :

$$\frac{57035}{28753} \approx 2 \quad \text{et} \quad \frac{28753}{14212} \approx 2,022$$

On peut donc comprendre qu'il doit y avoir environ 2 fois plus de billes rouges que de billes bleues et 2 fois plus de billes bleues que de billes vertes...

Et effectivement, il y avait bien dans l'urne : 4 billes rouges, 2 billes bleues et 1 bille verte.

(On aurait eu la même constatation en mettant dans l'urne 8 billes rouges, 4 billes bleues et 2 billes vertes aussi par exemple.)

Il y avait donc 7 billes dans l'urne et on remarque en prenant les fréquences d'apparitions que :

$$\frac{57035}{100000} = 0,57035 \text{ et } P(\text{« obtenir du rouge »}) = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

$$\frac{28753}{10000} = 0,28753 \text{ et } P(\text{« obtenir du bleu »}) = \frac{2}{7} \approx 0,286$$

$$\frac{14212}{100000} = 0,14212 \text{ et } P(\text{« obtenir du vert »}) = \frac{1}{7} \approx 0,143$$

Si on avait effectué une infinité de tirages on aurait retrouvé ces probabilités.

VI. Plein d'exercices corrigés pour vous entraîner !

1) Sur les issues et les événements :

Exercice 1 :

On place dans une urne opaques 6 boules indiscernables au touché : 2 rouges numérotés de 1 à 2, deux blanches numérotées de 1 à 2, deux noires numérotées de 1 à 2.

- a) Si on en tire une au hasard et qu'on regarde sa couleur uniquement, quelles sont les issues possibles ?

Les issues sont : Blanc, Rouge et Noire

- b) Si on en tire une au hasard et qu'on regarde uniquement le chiffre inscrit dessus, quelles sont les issues possibles ?

Les issues sont : 1 et 2

- c) Si on en tire une au hasard et qu'on regarde sa couleur et son chiffre, quelles sont les issues possibles ?

Les issues sont : Rouge 1, Rouge 2, Blanc 1, Blanc 2, Noir 1 et Noir 2

Exercice 2 :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On regarde sa couleur et sa valeur. (La couleur d'une carte est Cœur, Carreau, etc. et la valeur est Roi, Dame, Valet, 10, 9, etc.)

On considère les événements suivants :

A = « Obtenir le 9 de carreau »

B = « Obtenir un Valet »

C = « Obtenir le 5 de trèfle »

D = « Obtenir du Carreau »

E = « Obtenir une dame et du Cœur »

F = « Obtenir du Pique, du Trèfle ou du Cœur »

Répondre à ces questions en choisissant vos réponses parmi les événements donnés ci-dessus :

1) Donner un événement élémentaire.

C'est A.

2) Donner un événement impossible.

L'événement C est un événement impossible car dans un jeu de 32 cartes il n'y a pas de 2, de 3, de 4, de 5 et de 7.

3) Donner deux événements contraires.

Ce sont les événements D et F, car si on obtient du Carreau on ne peut pas obtenir du Pique, du Trèfle ou du Cœur (et inversement.)

4) Donner deux événements incompatibles mais non contraires.

B et C sont incompatibles mais non contraires car ils peuvent être faux tous les deux.

(On aurait pu aussi répondre : A et E ; D et E etc.)

Exercice 3 :

On choisit une lettre au hasard dans le mot « CHARLATAN ».

1) Donner les issues de cette expérience.

Les issues sont : C, H, A, R, L, T et N

(si vous avez mis plusieurs fois la lettre A c'est faux !)

2) Donner les événements élémentaires de cette expérience.

« Obtenir C » ou « Obtenir H » etc.

3) Donner un événement impossible de cette expérience.

« Obtenir la lettre K » est un événement impossible par exemple

4) Donner deux événements contraires de cette expérience.

« Obtenir une voyelle » et « obtenir une consonne » sont deux événements contraires de cette expérience

2) Sur les probabilités :

Exercice 1 :

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

A = « Obtenir un Roi »

B = « Obtenir le 6 de cœur »

C = « Obtenir une figure » (Une figure est une carte avec un personnage dessus : Roi, Dame, Valet. Dans un jeu de tarot il y a aussi le cavalier.)

D = « Obtenir du carreau »

E = « Obtenir du trèfle ou du pique »

Calculer les probabilités de ces événements.

2) Refaire le même exercice mais en tirant une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

Solution :

1) $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ on peut directement trouver $\frac{1}{8}$ en remarquant que dans un jeu de 32 cartes il y a 8 cœurs, 8 carreaux, etc. et un seul roi pour chaque couleur

$P(B) = 0$ (car il n'y a pas de 2, de 3, de 4, de 5 et de 6 dans un jeu de 32 cartes)

$P(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ (il y a 3 figures par couleur...)

$P(D) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ (une seule couleur parmi les 4 d'un jeu de cartes)

$P(E) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

2) $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ on peut directement trouver $\frac{1}{13}$ en remarquant que dans un jeu de 52 cartes il y a 13 cœurs, 13 carreaux, etc. et un seul roi pour chaque couleur

$P(B) = \frac{1}{52}$

$P(C) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ (il y a 3 figures par couleur...)

$P(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ (une seule couleur parmi les 4 d'un jeu de cartes)

$P(E) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

Exercice 2 :

Dans une classe de 28 élèves on a :

17 filles dont 5 ont des lunettes

11 garçons dont 3 ont des lunettes

1) On choisit un élève au hasard dans la classe.

a) Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?

b) Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon à lunettes ?

c) Quelle est la probabilité que l'élève choisi porte des lunettes ?

2) On choisit maintenant un élève au hasard parmi les garçons. Quelle est la probabilité que l'élève choisi ne porte pas de lunettes ?

Solution :

1) a) La probabilité est de $\frac{17}{28}$ (17 filles pour 28 élèves)

b) La probabilité est de $\frac{3}{28}$ (3 garçons à lunettes pour 28 élèves)

c) La probabilité est de $\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$ (8 élèves en tout ont des lunettes...)

2) Il y a 8 garçons sans lunettes parmi les 11 garçons de la classe, donc la probabilité est de $\frac{8}{11}$

Exercice 3 :

On place dans une urne opaque 3 boules blanches numérotées de 1 à 3, deux boules rouges numérotées de 1 à 2 et une boule noire numérotée 1.

On suppose que les boules sont indiscernables au touché.

On en tire une au hasard et on regarde sa couleur et son numéro.

1) Quelle est la probabilité que la boule porte le numéro 2 ?

2) Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

3) Quelle est la probabilité qu'elle porte un chiffre impair ?

4) Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ou noire ?

5) Quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro 3 ?

Solution :

1) La probabilité est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (2 boules avec le numéro 2 sur 6 boules)

2) La probabilité est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (il y a 2 boules rouges sur les 6)

- 3) La probabilité est de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (il y a 4 boules avec un numéro impair)
- 4) La probabilité est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (2 boules rouges et 1 noire sur les 6)
- 5) La probabilité est de $\frac{1}{6}$ (1 seule boule porte le numéro 3 dans l'urne)

3) Autres exercices sur les expériences aléatoires « simples » :

Exercice 1 :

Dans une urne opaque on a placé des billes rouges et des billes noires et rien d'autre. On en tire une au hasard et on regarde sa couleur. On sait qu'on a 3 chances sur 8 de tirer une boule rouge.

- 1) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?
- 2) Si il y a 40 billes en tout dans l'urne, combien y a-t-il de billes noires ?

Solution :

1) Il y a 3 chances sur 8 de tirer une boule rouge et il n'y a que des boules noires ou rouges dans l'urne. Donc les événements « Tirer une boule rouge » et « tirer une boule noire » sont contraires, donc :

$$\begin{aligned}
 P(\text{« Tirer une boule noire »}) &= 1 - P(\text{« Tirer une boule rouge »}) \\
 &= 1 - \frac{3}{8} \\
 &= \frac{8}{8} - \frac{3}{8} \\
 &= \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

2) On sait qu'il y a 5 chances sur 8 de tirer une bille noire.

Donc la proportion de billes noires dans l'urne est de $\frac{5}{8}$.

Or $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$ (en multipliant par 5 le numérateur et le dénominateur de la première fraction.)

Cela signifie donc qu'il y a **25 billes noires** dans l'urne s'il y a 40 billes en tout.

Exercice 2 :

Trois personnes, Aline, Bernard et Claude ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac.

- 1) Le contenu des sacs est le suivant :

Sac d'Aline : 5 billes rouges	Sac de Bernard : 10 billes rouges 30 billes noires	Sac de Claude : 100 billes rouges 3 billes noires
----------------------------------	--	---

Laquelle de ces personnes a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge ?

2) On souhaite qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge. Avant le tirage, combien de billes noires faut-il ajouter pour cela dans le sac d'Aline ?

Solution :

1) Aline n'a que des billes rouges dans son sac, les autres ont des billes noires et des billes rouges. Donc c'est forcément **Aline** qui a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge.

2) La probabilité que Bernard tire une bille rouge est de $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Donc il faut qu'Aline ait 4 fois plus de billes en tout que de billes rouges.

$5 \times 4 = 20$, donc il faut qu'Aline ait 20 billes en tout, donc il faut lui ajouter **15 billes noires**.

Autre méthode :

On a dans le sac de Bernard 10 billes rouges pour 30 billes noires, donc le rapport entre les deux est de $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Or $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$. Ce qui veut dire qu'Aline doit avoir 5 billes rouges pour 15 billes noires dans son sac pour avoir les mêmes chances que Bernard de tirer une bille rouge.

Exercice 3 :

On lance un dé à 6 faces classique mais truqué. La probabilité d'avoir 6 comme résultat est de $\frac{5}{7}$. Les autres faces sont équiprobables.

Déterminer la probabilité d'obtenir 2 avec ce dé.

Solution :

Comme la $P(\text{« Obtenir 6 »}) = \frac{5}{7}$ alors on a facilement :

$$\begin{aligned} P(\text{« Obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 »}) &= 1 - P(\text{« Obtenir 6 »}) \\ &= 1 - \frac{5}{7} \\ &= \frac{7}{7} - \frac{5}{7} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Maintenant, on sait que les 5 faces 1, 2, 3, 4 et 5 sont équiprobables, donc ont la même probabilité, donc :

$$P(\text{« Obtenir 2 »}) = P(\text{« Obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 »}) : 5$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{7} \\
&= \frac{2}{7} \times \frac{1}{5} \\
&= \frac{2}{35}
\end{aligned}$$

On a donc une probabilité de $\frac{2}{35}$ d'obtenir 2.

Exercice 4 :

On lance simultanément un dé à 6 faces et un dé à 4 faces (oui ça existe, cherchez sur Google vous verrez...) Les deux dés sont numérotés normalement : de 1 à 6 pour le premier et de 1 à 4 pour le deuxième.

Une fois les deux dés lancés, on additionne les deux faces obtenues et on note le résultat obtenu.

- 1) Déterminer la probabilité d'obtenir 2.
- 2) Déterminer la probabilité d'obtenir 6.
- 3) Déterminer le(s) résultat(s) qui a(ont) le plus de chance de se produire.

PS : Il faut penser à utiliser un tableau pour cet exercice...

Solution :

D'abord, pour votre culture personnelle, voici des dés existant et possédant 4, 6, 8, 10, 12 ou 20 faces :



(Le dé à 4 faces est celui de gauche : il a la forme d'un tétraèdre régulier.)

Comme l'indique l'énoncé, il faut ici penser à faire un tableau afin de pouvoir voir les résultats obtenus lors de cette expérience pour les différents lancers possibles :

RESULTATS DU DE A 6 FACES

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	<i>4</i>	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

RESULTATS DU DE A 4 FACES

Sur la première ligne on a mis les résultats possibles du dé à 6 faces.

Dans la première colonne on a mis les résultats possibles du dé à 4 faces.

Dans chaque case on met ainsi la somme obtenue avec les deux dés.

Par exemple, le 4 en gras et italique correspond à un 3 obtenu avec le dé à 6 faces et à un 1 obtenu avec le dé à 4 faces.

On constate qu'il y a 24 résultats (répétés ou non) dans le tableau... C'est important pour la suite.

1) $P(\text{« Obtenir 2 »}) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ (Il y a un seul 2 dans le tableau des résultats)

2) $P(\text{« Obtenir 6 »}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ (Il y a quatre fois le résultat 6...)

4) Les résultats qui ont le plus de chance de se produire sont 5, 6 et 7, car il y a pour ces trois résultats 4 chances sur 24 de les obtenir.

5) Expériences aléatoires successives :

Exercice 1 :

Pour entrer dans un immeuble, on doit composer un code.

Ce code est constitué ainsi : On choisit d'abord une lettre parmi les lettres A, B et C. On choisit ensuite une lettre parmi les deux restantes. Puis on choisit un chiffre entre 1 et 3.

Par exemple, on peut avoir comme code : CA2

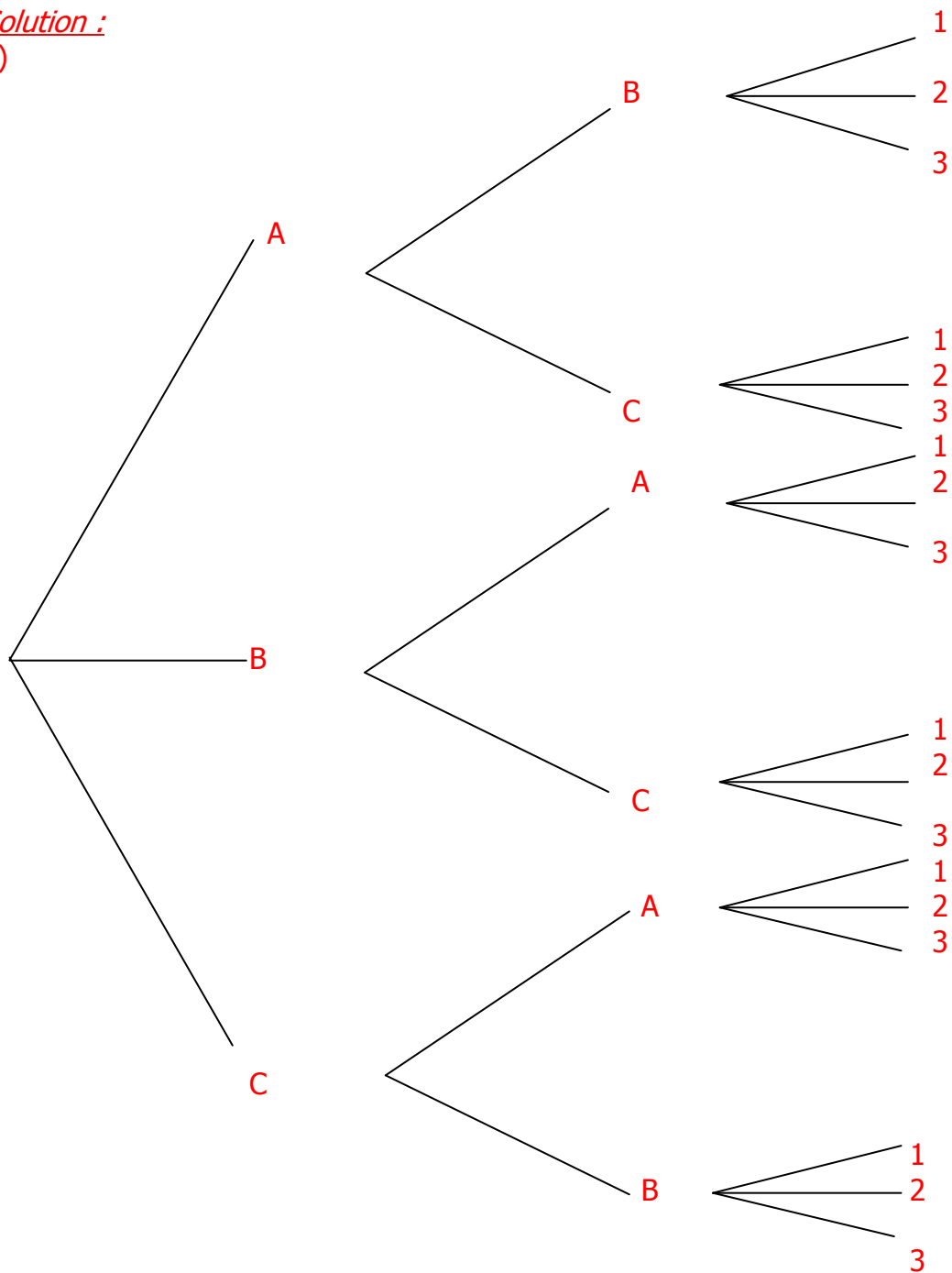
On ne peut pas avoir comme code BB1 ou AB4 (je vous laisse comprendre pourquoi...)

- 1) Dessiner l'arbre représentant toutes les combinaisons possibles.
- 2) On choisit un code au hasard. Calculer à l'aide de votre arbre les probabilités des événements suivants :
 - A = « Avoir un code possédant 2 consonnes »
 - B = « Avoir un code comportant un chiffre pair »
 - C = « Avoir un code avec une seule consonne »
 - D = « Avoir un code avec deux lettres qui se suivent dans l'ordre alphabétique »
 - E = « Avoir un code comportant la lettre A et le chiffre 1 »

F = « Avoir un code ne comportant pas la lettre A ou le chiffre 1 »

Solution :

1)



Il y a en tout 18 chemins possibles ici.

$$2) P(A) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$P(D) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

$$P(F) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Exercice 2 :

On lance plusieurs fois de suite un dé non truqué à 6 faces et on note à chaque fois les résultats obtenus. On a obtenu pour les 10 premiers lancers un 6.

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 au onzième lancer ?

Solution :

(Exercice très dur ! Mais il faut le voir au moins une fois pour ne pas être pris au dépourvu.)

Le dé n'étant pas truqué, la probabilité d'avoir 6 est... $\frac{1}{6}$ Peu importe qu'un énorme coup de bol ait fait qu'on ait obtenu 10 fois de suite un 6... On aura toujours une chance sur 6 d'avoir n'importe quelle face du dé.

Exercice 3 :

On place dans une urne opaque 4 billes vertes, 2 billes rouges et 1 noire.

On en tire une au hasard. On note sa couleur et on la remet dans l'urne. On tire à nouveau une bille dans l'urne et on note sa couleur. (Ici on a une expérience aléatoire répétée deux fois **avec remise** : on remet la première bille tirée dans l'urne.)

Calculer la probabilité de ces événements suivants :

A = « Obtenir 2 billes noires »

B = « Obtenir une rouge et une verte peu importe l'ordre »

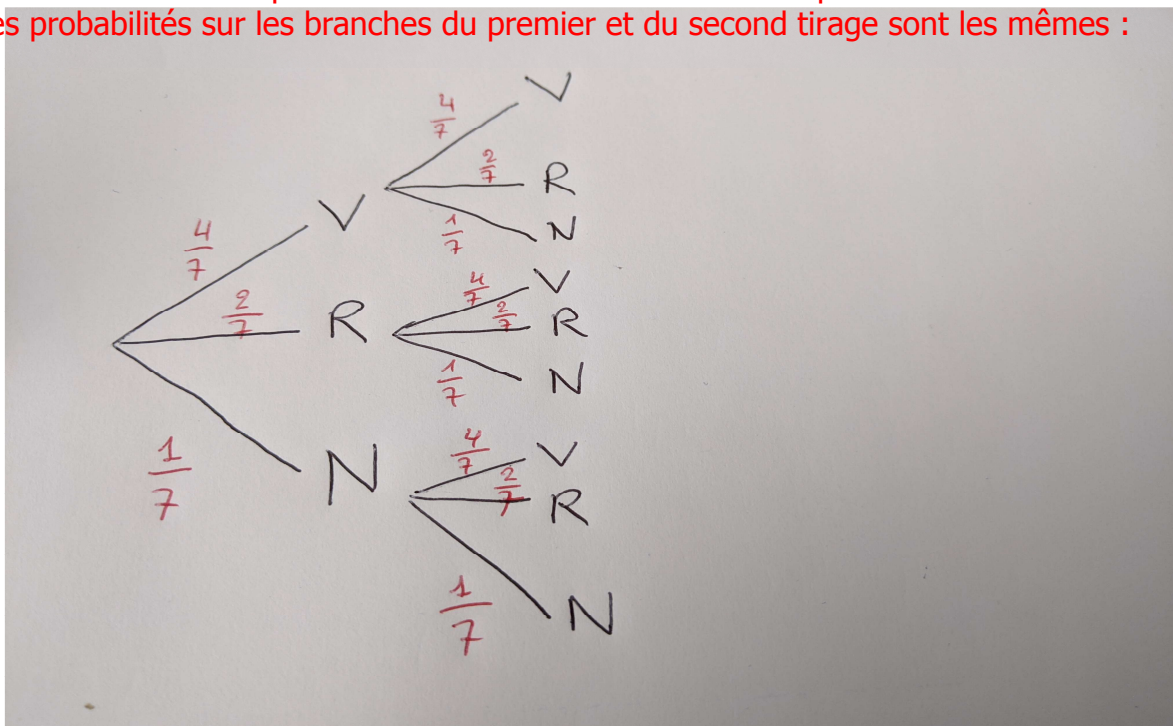
C = « Obtenir une rouge et une verte dans cet ordre »

D = « Obtenir au moins une bille rouge »

E = « Ne pas obtenir de rouge »

Solution :

On réalise l'arbre de cette expérience et on le pondère, c'est à dire qu'on place les probabilités sur chaque branche... Comme ici on remet la première bille dans l'urne, les probabilités sur les branches du premier et du second tirage sont les mêmes :



A partir de cet arbre on peut calculer les probabilités de ces événements :

A = « Obtenir 2 billes noires »

B = « Obtenir une rouge et une verte peu importe l'ordre »

C = « Obtenir une rouge et une verte dans cet ordre »

D = « Obtenir au moins une bille rouge »

E = « Ne pas obtenir de rouge »

$$P(A) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{49} \text{ (un seul chemin permet d'avoir deux billes noires)}$$

$$P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{49} + \frac{8}{49} = \frac{16}{49} \text{ (deux chemins permet d'avoir une rouge et une verte dans n'importe quel ordre.)}$$

$$P(C) = \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{49} \text{ (un seul chemin permet d'avoir une rouge et une verte dans cet ordre.)}$$

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \times \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{7} \times \frac{2}{7} \\ &= \frac{8}{49} + \frac{2}{7} \times 1 + \frac{2}{49} \\ &= \frac{8}{49} + \frac{14}{49} + \frac{2}{49} \\ &= \frac{24}{49} \end{aligned}$$

(Il y a plusieurs chemins pour avoir au moins une bille rouge. Si on obtient rouge au premier tirage les 3 branches qui suivent sont valables... et elles ont une probabilité...)

$P(E) = 1 - P(D)$ car soit on a au moins une bille rouge soit on a aucune, donc les événements E et D sont contraires.

$$\text{Donc } P(E) = 1 - \frac{24}{49} = \frac{49}{49} - \frac{24}{49} = \frac{25}{49}$$

Exercice 4 :

On place dans une urne opaque 4 billes vertes, 2 billes rouges et 1 noire.

On en tire une au hasard. On note sa couleur et on ne la remet pas dans l'urne. On tire à nouveau une bille dans l'urne et on note sa couleur. (Ici on a une expérience aléatoire répétée deux fois sans remise: on ne remet pas la première bille tirée dans l'urne. Ce qui change la composition de l'urne au deuxième tirage... Pensez-y en pondérant votre arbre...)

Calculer la probabilité de ces événements suivants :

A = « Obtenir 2 billes noires »

B = « Obtenir une rouge et une verte peu importe l'ordre »

C = « Obtenir une rouge et une verte dans cet ordre »

D = « Obtenir au moins une bille rouge »

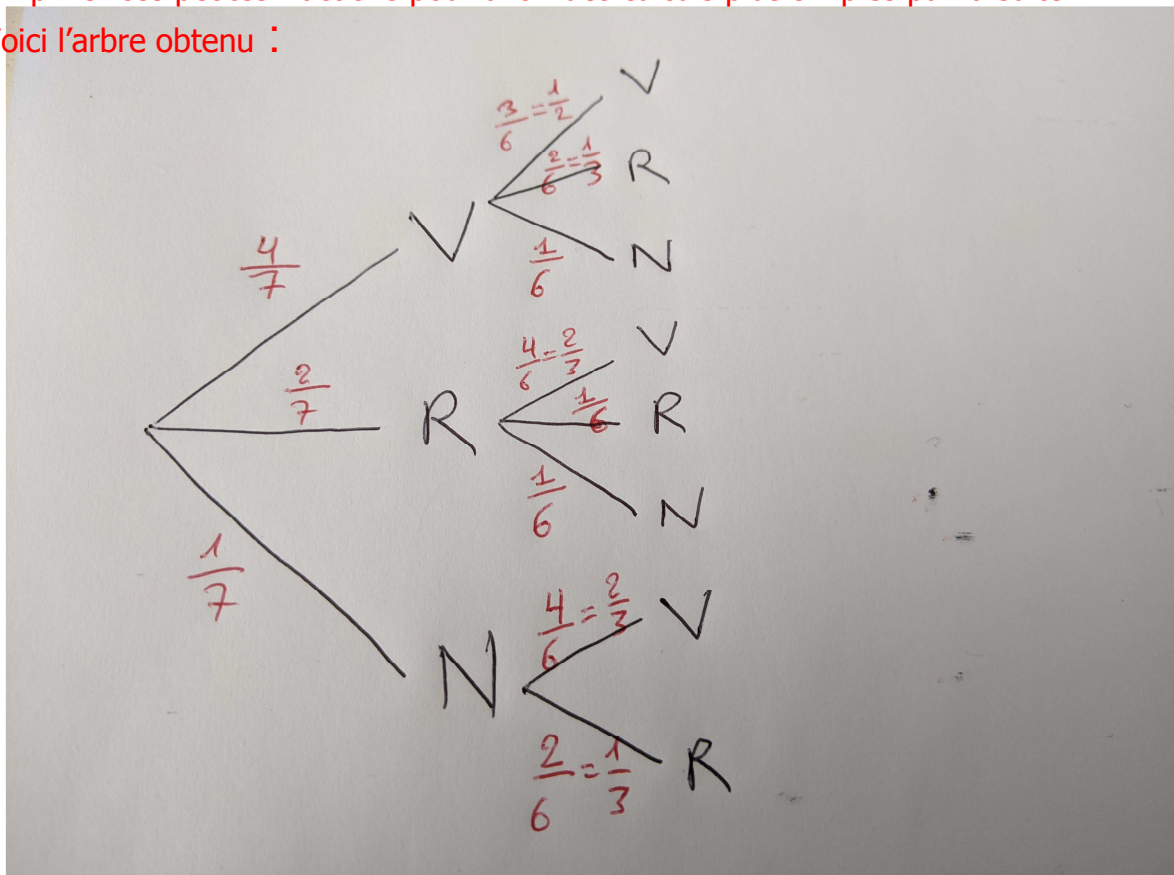
E = « Ne pas obtenir de rouge »

Solution :

On réalise l'arbre de cette expérience et on le pondère, c'est à dire qu'on place les probabilités sur chaque branche... Comme ici on ne re remet pas la première bille dans l'urne, les probabilités sur les branches du premier et du second tirage ne sont pas les mêmes !!!

En effet, il n'y aura plus que 6 billes dans l'urne au deuxième tirage et une bille de la couleur tirée en premier aura disparu de l'arbre... Vous remarquerez qu'il faut penser à simplifier ces petites fractions pour avoir des calculs plus simples par la suite...

Voici l'arbre obtenu :



On voit qu'en bas de l'arbre il n'y aura plus que deux branches car une fois la bille noire tirée, il n'y en aura plus dans l'urne au deuxième tirage...

A partir de cet arbre on peut calculer les probabilités de ces événements :

A = « Obtenir 2 billes noires »

B = « Obtenir une rouge et une verte peu importe l'ordre »

C = « Obtenir une rouge et une verte dans cet ordre »

D = « Obtenir au moins une bille rouge »

E = « Ne pas obtenir de rouge »

$P(A) = 0$ (Il n'y a qu'une seule bille noire dans l'urne et une fois tirée on ne la remet pas donc...)

$P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{21} + \frac{4}{21} = \frac{8}{21}$ (deux chemins permet d'avoir une rouge et une verte dans n'importe quel ordre.)

$P(C) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{3}$ (un seul chemin permet d'avoir une rouge et une verte dans cet ordre.)

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{21} + \frac{2}{7} \times 1 + \frac{1}{21} \\ &= \frac{4}{21} + \frac{6}{21} + \frac{1}{21} \\ &= \frac{11}{21} \end{aligned}$$

(Il y a plusieurs chemins pour avoir au moins une bille rouge. Si on obtient rouge au premier tirage les 3 branches qui suivent sont valables... et elles ont un comme probabilité... je vous l'ai inscrit en bleu dans le calcul.)

$P(E) = 1 - P(D)$ car soit on a au moins une bille rouge soit on a aucune, donc les événements E et D sont contraires.

$$\text{Donc } P(E) = 1 - \frac{11}{21} = \frac{21}{21} - \frac{11}{21} = \frac{10}{21}$$

Exercice 5 :

On place dans un sac opaques 3 jetons : 2 avec la lettre A et 1 avec la lettre B.

On tire un jeton au hasard dans le sac, on note la lettre marqué dessus, puis sans remettre ce jeton dans le sac on tire un deuxième jeton et on note la lettre obtenue.

Faire un arbre pour illustrer cette expérience aléatoire et calculer les probabilités des événements suivants :

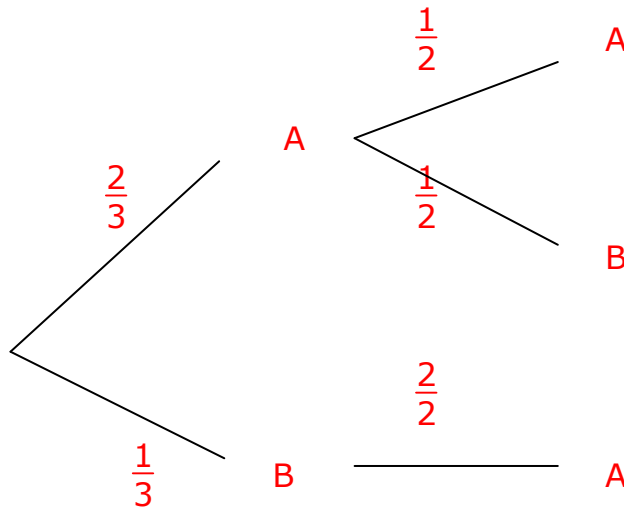
A = « Obtenir deux fois la lettre A »

B = « Obtenir la lettre B »

C = « Obtenir A et B dans cette ordre »

Il s'agit ici d'expériences aléatoires sans remise (on ne remet pas le jeton dans le sac après le premier tirage.)

Solution :



(Explications pour ceux qui ont du mal : au départ 2 lettres sur 3 sont des A et 1 sur 3 est un B. Si on tire la lettre A il reste 1 A et 1 B dans l'urne, donc 1 chance sur deux d'avoir une de ces lettres. Si par contre la lettre B dans le sac en premier, il reste donc 2 A uniquement dans le sac...)

$$P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

(un seul chemin : celui du haut)

$$P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(2 chemins possibles)

$$P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

(un seul chemin : le deuxième avec A au départ puis B)

Exercice 6 :

Il est inutile de faire un arbre complet ici... On peut faire juste un petit bout de l'arbre pour s'aider...

On prend un paquet de 52 cartes non truquées (c'est à dire qu'il s'agit un jeu de cartes tout à fait normal !)

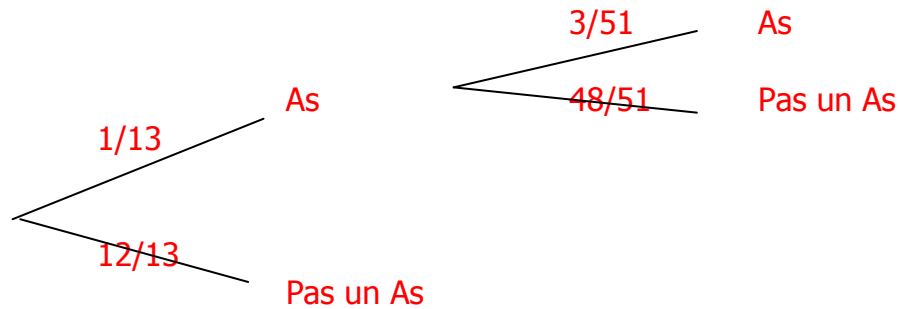
On le mélange... On le mélange... On le mélange encore... Bon je pense que c'est assez mélangé là ! On tire les cartes une à une sans les remettre dans le paquet.

Calculer :

- 1) La probabilité que la première carte soit un as ?
- 2) La probabilité que les deux premières cartes soient des as ?
- 3) La probabilité que les trois premières cartes soient des as ?
- 4) La probabilité que les 4 premières cartes soient des as ?

Solution :

- 1) La probabilité que la première carte soit un as est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- 2) Si on fait un arbre ici, en ne considérant que deux branches à chaque fois, une si on a un as et une si on en a pas, alors on aura :



(Si on a tiré un As en premier, il reste alors 51 cartes et 3 As...)

Donc la probabilité d'avoir deux as en tirant deux cartes est : $\frac{1}{13} \times \frac{3}{51} = \frac{3}{663} = \frac{1}{221}$

- 3) Pour que les 3 premières cartes soient des as on calculerait :

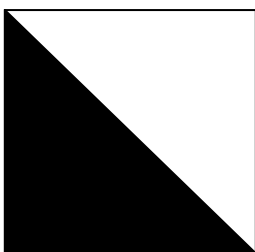
$$\frac{1}{221} \times \frac{2}{50} = \frac{2}{11050}$$

- 4) Et pour que les 4 premières soient des as on calcule :

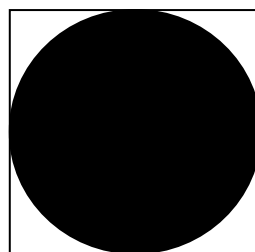
$$\frac{2}{11050} \times \frac{1}{49} = \frac{2}{541450} = \frac{1}{270725}$$

6) Un dernier pour la route ?

Exercice :



carré 1



carré 2

- 1) On place un point au hasard dans le carré 1. Quelle est la probabilité qu'il soit dans le triangle noir ?
- 2) On place un point au hasard dans le carré 2. Quelle est la probabilité qu'il soit dans disque noir ?

Solution :

- 1) Normalement on trouve de suite que la probabilité est $\frac{1}{2}$.
- 2) Ici vous êtes nombreux à galérer pour trouver la réponse. Pourtant c'est le même principe que pour la première question ! Je m'explique...

Dans le carré 1 on voit que la surface du triangle noir est deux fois plus petite que la surface du carré. C'est pour cela qu'on obtient une probabilité de $\frac{1}{2}$:

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{Surface du triangle noir}}{\text{Surface du carré}} = \frac{1}{2}$$

Pour le carré 2, il suffit d'utiliser le même principe :

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{Surface du disque noir}}{\text{Surface du carré}}$$

Mais je vous vois râler déjà : « oui mais on a aucune information de longueur ! ! »

Oui on ne dispose d'aucune information, mais comme on sait qu'on a un carré un départ, alors si on appelle D le côté du carré, on voit que cette longueur D correspond au diamètre du disque noir.

La formule de l'aire d'un carré de côté D est : $D \times D = D^2$

La formule de l'aire d'un disque est : $\frac{\pi \times D^2}{4}$

(on peut retrouver cette formule si on connaît l'aire d'un disque à partir de son rayon R : $\pi \times R^2 = \pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{D^2}{4}$)

$$\begin{aligned} \text{D'où : Probabilité que le point soit dans le disque} &= \frac{\frac{\pi \times D^2}{4}}{D^2} \\ &= \frac{\pi \times D^2}{4} \times \frac{1}{D^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \quad (\text{en barrant les } D^2) \end{aligned}$$

Et voilà !

(Si on remplace π par 3,14 on trouve une probabilité environ égale à 0,785...)

I. Définitions et notations :

On commence par la définition de base :

- Une fonction f est un processus qui à toute valeur initiale fait correspondre une valeur d'arrivée.

Une fonction peut être donné à partir d'un graphique, d'un tableau ou d'une formule algébrique.

Notation :

- Si on appelle f la fonction qui à un nombre x fait correspondre le double de x , alors f est notée :

$$f : x \longmapsto 2x$$

- La fonction g qui à un nombre donné fait correspondre le carré de ce nombre diminué de 4 sera notée :

$$g : x \longmapsto x^2$$

(On donne le nom de la fonction, on ouvre deux points, on met la lettre correspondant à la valeur de départ (x ou autre chose) et derrière une flèche on écrit la formule utilisée par la fonction.)

Remarque 1 :

Le nombre obtenu à partir d'un nombre x par une fonction est appelée image de x et noté : $f(x)$

Exemples :

- Si on considère la fonction $h : x \longmapsto 2x - 1$, alors l'image de x est : $h(x) = 2x - 1$
- Par la fonction h précédente, l'image de 3 est : $h(3) = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

($h(x)$ se lit "h de x" et $h(3)$ se lit oralement « h de 3 »)

Remarque 2 :

En partant du nombre 3 par la fonction h on obtient 5 comme image.

On dit que 3 est un antécédent de 5 par la fonction h .

(Donc quand on obtient une valeur on partant d'un nombre on obtient une image, et quand on retrouve de quelle valeur on est parti pour avoir un résultat donné on a retrouvé un antécédent...)

Exemple :

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto 3x + 1$$

Calculer les images de 0 ; - 4 et 7 par la fonction f :

$$f(0) = 3 \times 0 + 1 = \mathbf{1}$$

$$f(-4) = 3 \times (-4) + 1 = -12 + 1 = \mathbf{-11}$$

$$f(7) = 3 \times 7 + 1 = 21 + 1 = \mathbf{22}$$

Donc :

L'image de 0 par la fonction f est 1

Un antécédent de - 11 par la fonction f est -4

Remarque 3 :

Tout nombre a une image et une seule par une fonction. Mais un nombre donné peut avoir un antécédent, plusieurs antécédents ou aucun.

Exemple :

Soit g la fonction définie par :

$$g : x \longmapsto x^2$$

1) Déterminer $g(0)$, $g(-2)$, $g(2)$ et $g(-5)$:

$$g(0) = 0^2 = 0$$

$$g(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$g(2) = 2^2 = 4$$

$$g(-5) = (-5)^2 = 25$$

2) A partir de la question précédente donner le ou les antécédents de 4 :

Grâce a la question 1, on voit que 2 et -2 sont deux antécédents de 4.

3) Peut-on trouver un antécédent de - 4 par la fonction précédente ? Pourquoi ?

On ne peut retrouver un antécédent de - 4 car un carré étant toujours positif, la fonction g ne donnera que des valeurs positives quelle que soit la valeur de départ.

II. Fonctions, tableaux et représentation graphique :

Comme dit précédemment, une fonction peut-être donnée par un tableau ou par un graphique (le graphique pouvant être obtenu lui-même à partir d'un tableau.)

Exemple :

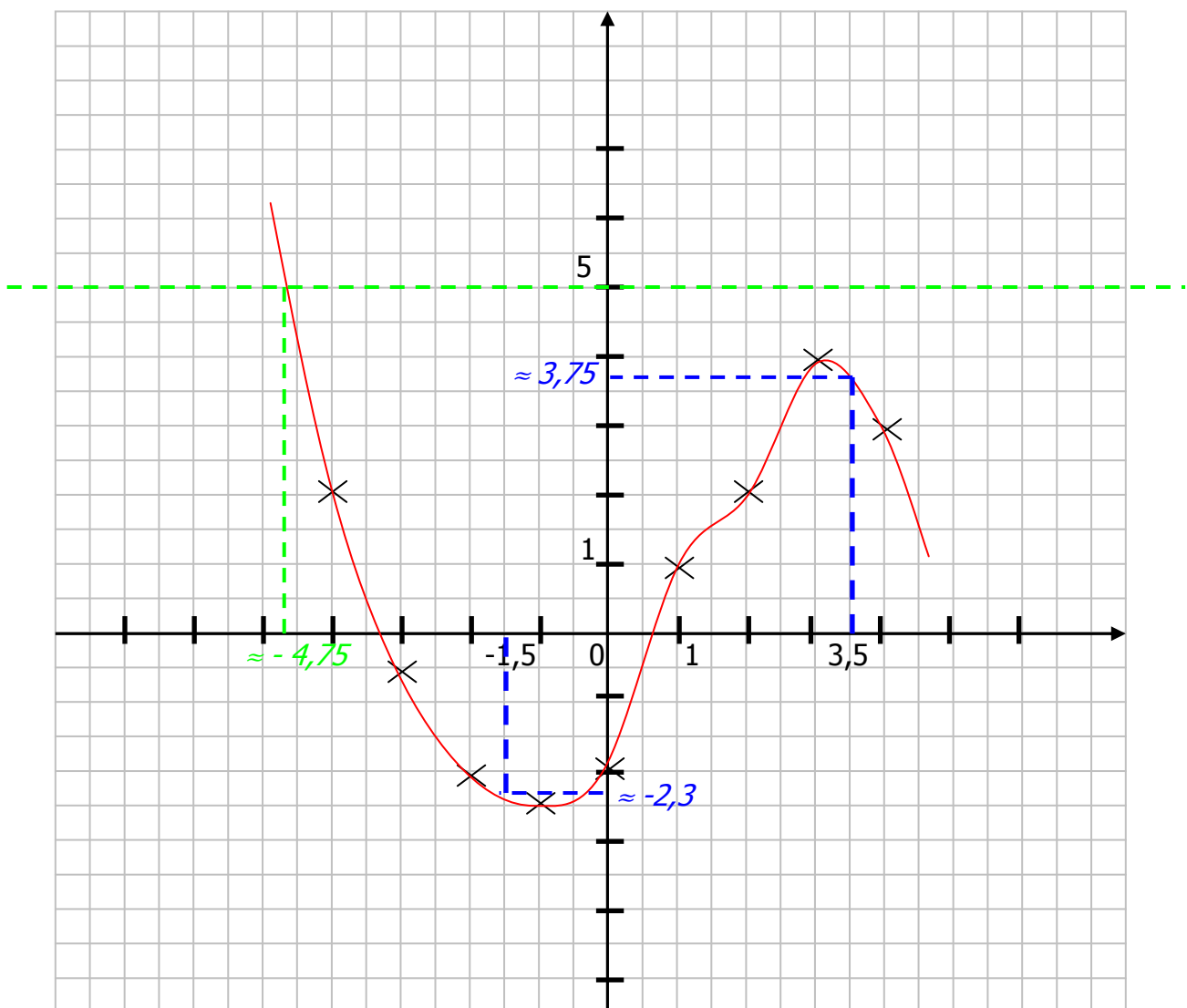
On considère le tableau suivant qui donne quelques valeurs obtenues par une fonction f :

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	- 0,5	- 2	- 2,5	-2	1	2	4	3

(La première ligne donne les valeurs de départ utilisées et la seconde ligne donne les images obtenues à l'aide de la fonction f .)

Pour représenter graphiquement la fonction f , il suffit de placer dans un repère les points de coordonnées $(x ; f(x))$ obtenus dans le tableau précédent et de tracer la courbe passant par ces points. On l'a fait ici en rouge :

(Comme les points ne sont pas alignés, on trace courbe à main levée en essayant de bien suivre le mouvement...)



- A partir de la courbe obtenue, on peut trouver des images et des antécédents.

Par lecture graphique, déterminer $f(3,5)$ et $f(-1,5)$:

$$f(3,5) \approx 3,75$$

$$f(-1,5) \approx -2,3$$

(En bleu sur le graphique : on place les abscisses 3,5 et - 1,5 et on remonte, ou redescend sur la courbe pour trouver les ordonnées...)

Par lecture graphique, déterminer les antécédents de 5 par la fonction f :

On trouve un seul antécédent de 5 par la fonction f : -4,75

(En vert sur le graphique : on trace la droite horizontale d'ordonnée 5 et on regarde si elle coupe la courbe. Aux points d'intersections on projette sur l'axe des abscisses pour retrouver un ou des antécédents.)

- A partir du tableau on peut retrouver aussi des images et des antécédents.

A l'aide du tableau on trouve :

$f(-2) = -2$
L'image de 4 est 3
2 a pour antécédent - 4

Remarque 5 :

Pour représenter une fonction quelconque il faut utiliser un tableau comme précédemment, ce qui permet de placer dans un repère plusieurs points et d'en déduire l'allure de la courbe qui représente la fonction.

Mais pour les fonctions étudiées plus en détail en troisième, on verra qu'on pourra (et qu'il faudra !) se passer d'un tel tableau et que le tracé se fera de manière beaucoup plus rapide.

Remarque 6 :

Un repère où les axes sont perpendiculaires est appelé repère orthogonal.

Un repère où les axes sont perpendiculaires et les unités sur les deux axes sont les mêmes est appelé repère orthonormal.

Remarque 7 :

La courbe représentant une fonction ne peut revenir en arrière : quand on se déplace sur la courbe on va soit de la gauche vers la droite, soit de la droite vers la gauche mais on ne rebrousse pas de chemin ! Par contre on peut monter et descendre et monter et descendre et monter et descendre et monter... et descendre...

25- FONCTIONS LINEAIRES, AFFINES & CONSTANTES

Voici plus en détail les fonctions que vous devez connaître cette année :

I. Définitions :

- Une fonction f est une fonction linéaire si elle est de la forme :

$$f : x \mapsto ax \text{ où } a \text{ est une valeur fixe}$$

- Une fonction f est une fonction affine si elle est de la forme :

$$f : x \mapsto ax + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux valeurs fixes}$$

- Une fonction f est une fonction constante si elle est de la forme :

$$f : x \mapsto k \text{ où } k \text{ est une valeur fixe}$$

Exemples :

Parmi les fonctions suivantes, déterminer les fonctions affines, les fonctions linéaires et les fonctions constantes :

$f : x \mapsto 3x$	fonction linéaire
$g : x \mapsto -7x + 2$	fonction affine
$h : x \mapsto 5x^2 - 3$	aucune (<i>il y a la lettre au carré</i>)
$k : x \mapsto x$	fonction linéaire (<i>car $x = 1x$</i>)
$m : x \mapsto 3x - 7$	fonction affine
$n : x \mapsto -5$	fonction constante (<i>il y a juste un nombre</i>)
$p : x \mapsto \frac{2}{3}x$	fonction linéaire
$s : x \mapsto 5 - 2x$	fonction affine (<i>car $5 - 2x = -2x + 5$</i>)

Remarques :

- Une fonction linéaire est un cas particulier des fonctions affines (car $kx + 0 = kx$)
- Une fonction constante est un cas particulier des fonctions linéaires (car $0x + k = k$)

- Pour un nombre donné, il n'existe qu'un seul antécédent pour les fonctions linéaires et les fonctions affines.

II. Retrouver un antécédent par calcul :

On suppose bien sûr qu'on connaît la « formule » de la fonction. Et il s'agit ici de résoudre des petites équations...

1) Soit la fonction linéaire f telle que $f(x) = 2x$
Déterminer l'antécédent de 7 par la fonction f :

On cherche x tel que $f(x) = 7$

On doit donc résoudre l'équation : $2x = 7$

$$2x = 7$$

$$\text{d'où } \frac{2x}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{d'où } x = \frac{7}{2} = 3,5$$

L'antécédent de 7 par la fonction f est donc 3,5.
(Et on a bien un seul antécédent donc...)

2) Soit la fonction affine g telle que $g(x) = 5x - 1$
Déterminer l'antécédent de 14 par la fonction g :

On cherche x tel que $g(x) = 14$

On doit donc résoudre l'équation : $5x - 1 = 14$

$$5x - 1 = 14$$

$$5x - 1 + 1 = 14 + 1$$

$$5x = 15$$

$$\text{d'où } \frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$$

$$\text{d'où } x = \frac{15}{5} = 3$$

L'antécédent de 14 par la fonction g est donc 3.

Remarque :

Une situation de proportionnalité est définie par une fonction linéaire.

Exemple :

Dans une station essence, on paye 1,299 € par Litre de gasoil.

1) Soit f la fonction donnant le prix payé en fonction du volume de gasoil pris.
Donner la fonction f :

$$f : x \longmapsto 1,299x$$

(Pour savoir combien on paie on multiplie le prix d'un litre par le nombre de litres, c'est à dire 1,299 par x si x représente le nombre de litres...)

2) En utilisant la fonction f, donner le prix payé pour 35 Litres de gasoil achetés :

On utilise la fonction en partant du nombre 35.

On calcule donc : $f(35) = 1,299 \times 35 \approx 45,47$

On devra donc payer **45,47 € pour 35 L de gasoil**

3) En déduire le prix payé pour 70 L de gasoil :

Le prix payé et le volume de carburant acheté sont proportionnels, donc pour 70 L on paiera le double du prix payé pour 35 L.

$45,47 \times 2 = 90,94$

Donc on paiera **90,94 € pour 70 L de gasoil.**

4) Déterminer le volume obtenu pour 72 € de gasoil :

Ici on doit rechercher un antécédent.

On cherche x tel que $f(x) = 72$

On doit donc résoudre l'équation : $1,299x = 72$

$$1,299x = 72$$

$$\frac{1,299x}{1,299} = \frac{72}{1,299}$$

$$\text{d'où } x \approx 55,43$$

On aura environ 55,43 L de gasoil pour 72 €.

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS LINEAIRES, AFFINES & CONSTANTES

On a vu que pour représenter graphiquement une fonction, il faut généralement passer par un tableau (avec des valeurs de départ en abscisse et les images obtenues en ordonnées) pour pouvoir avoir les coordonnées de quelques points et pouvoir tracer la courbe les représentant.

Heureusement, pour les fonctions linéaires, affines et constantes, cela va être beaucoup plus simple car les représentations graphiques de ces fonctions sont des droites. Et comme pour tracer une droite il suffit d'avoir deux points de cette droite, leurs tracés vont être très très simples... D'ailleurs tout ce qu'on fait c'est simple non ?

I. Représentations graphiques des fonctions linéaires :

Si on trace plusieurs fonctions linéaires à l'aide d'un tableau, on remarquerait toujours la même chose... C'est que nous dit cette propriété :

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

(Au cas où, l'origine est le point d'intersection des deux axes, la graduation 0 de ces deux axes...)

Et la réciproque est vraie :

- Si la représentation graphique d'une fonction est une droite passant par l'origine, alors cette fonction est une fonction linéaire.

Pour représenter des fonctions linéaires, il nous suffira donc d'avoir un point de la droite qui va la représenter, car on a déjà l'origine comme point pas où va passer cette droite.

Le tracé de la représentation graphique d'une fonction linéaire est donc très simple, et on va voir tout de suite plusieurs exemples avec certains cas particuliers...

Dans ces exemples on va tracer des fonctions $x \mapsto ax$ où **a** est une valeur fixée. Le nombre a est appelé coefficient (directeur) de la fonction linéaire.

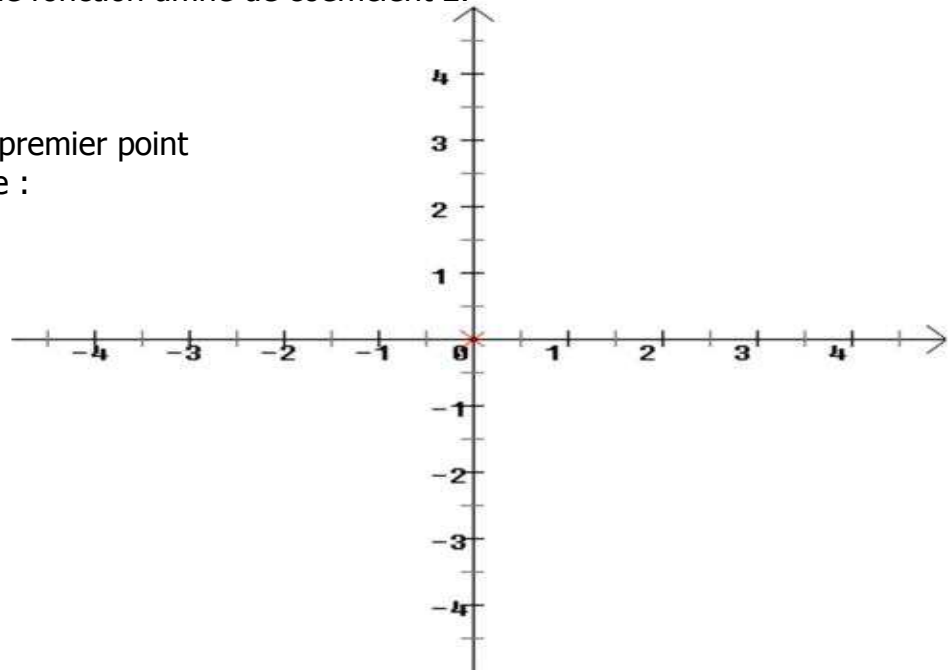
Exemple 1 :

Tracer la représentation graphique de la fonction : $f : x \mapsto 2x$

Il s'agit bien d'une fonction affine de coefficient 2.

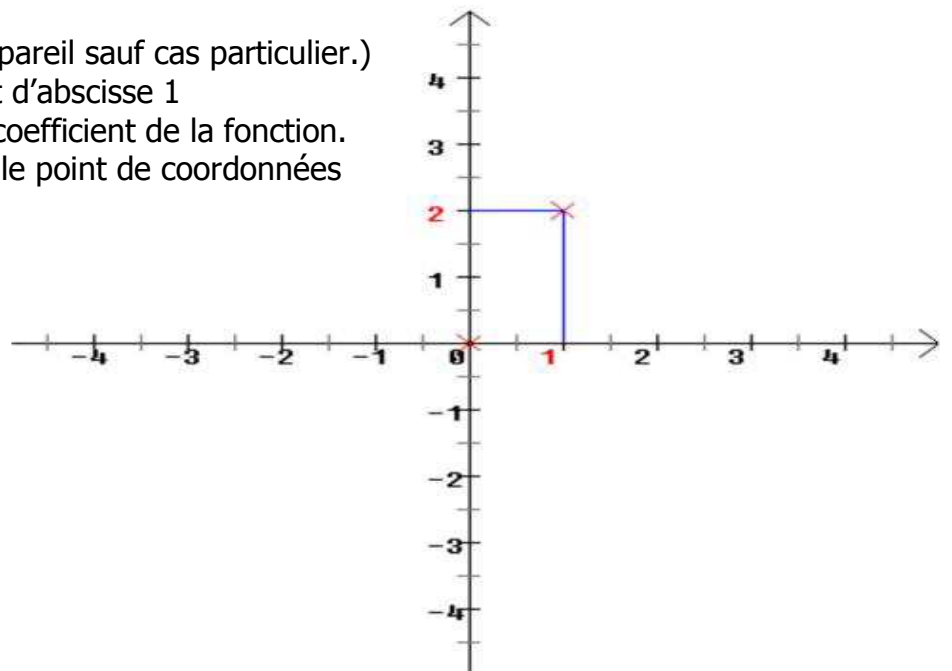
Etape 1 :

On place comme premier point
l'origine du repère :



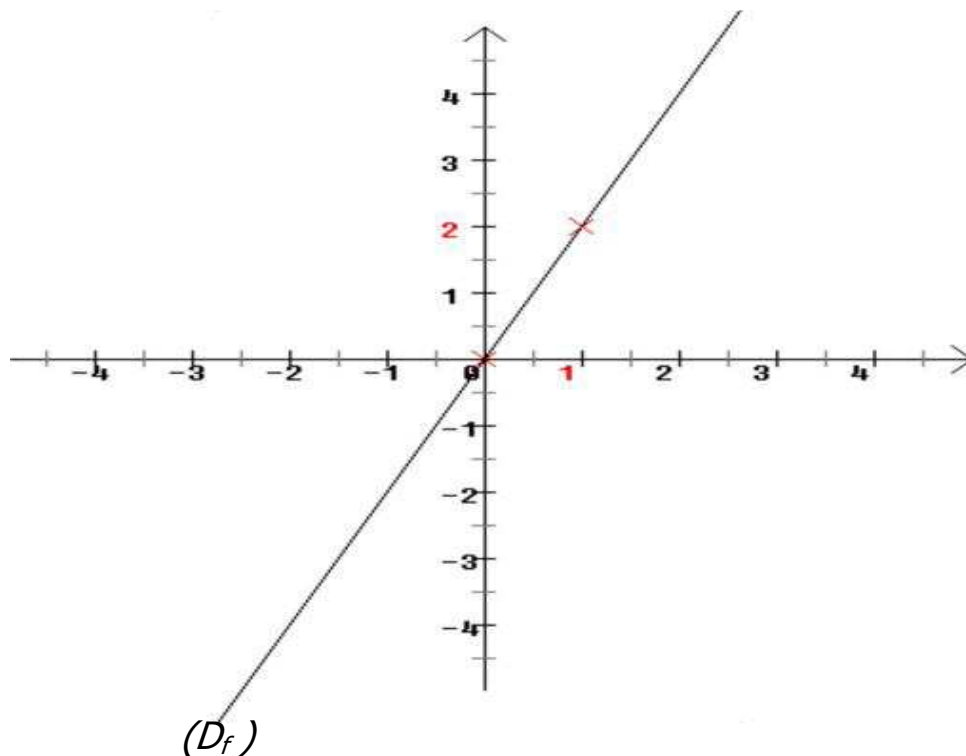
Etape 2 :

(là c'est toujours pareil sauf cas particulier.)
On place un point d'abscisse 1
et d'ordonnée le coefficient de la fonction.
Donc ici on place le point de coordonnées
(1 ; 2)



Etape 3 :

On trace la droite passant par l'origine et par le point de coordonnées (1 ; 2) placé à l'étape 2.



Remarque :

sauf indications contraires, la droite représentant la fonction f est notée (D_f) .

Exemple 2 :

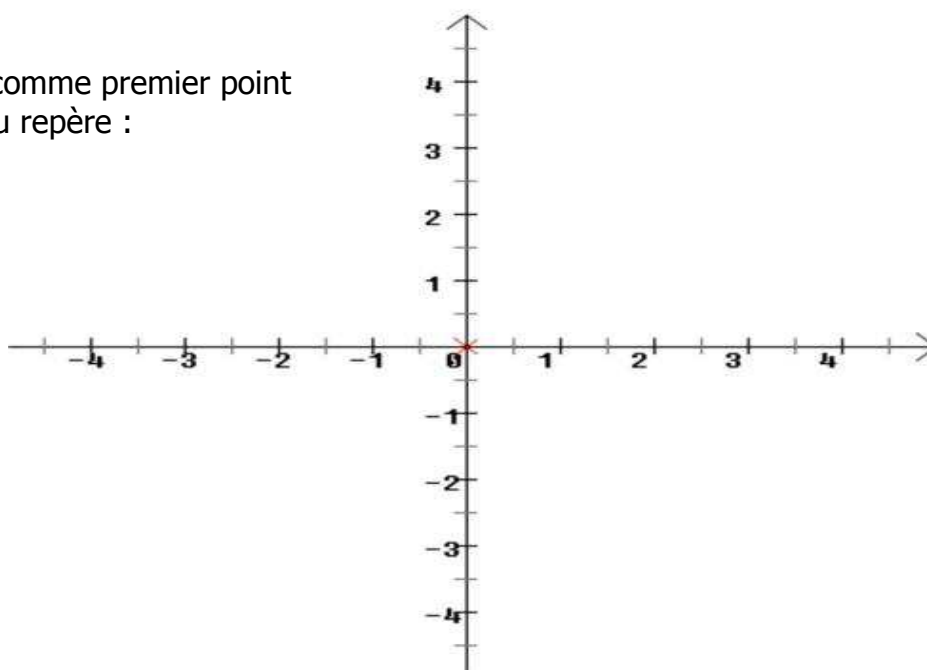
Tracer la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -x$

Encore une fois il s'agit bien d'une fonction linéaire de coefficient... - 1
(car $-x = -1x$)

On fait comme pour l'exemple 1 :

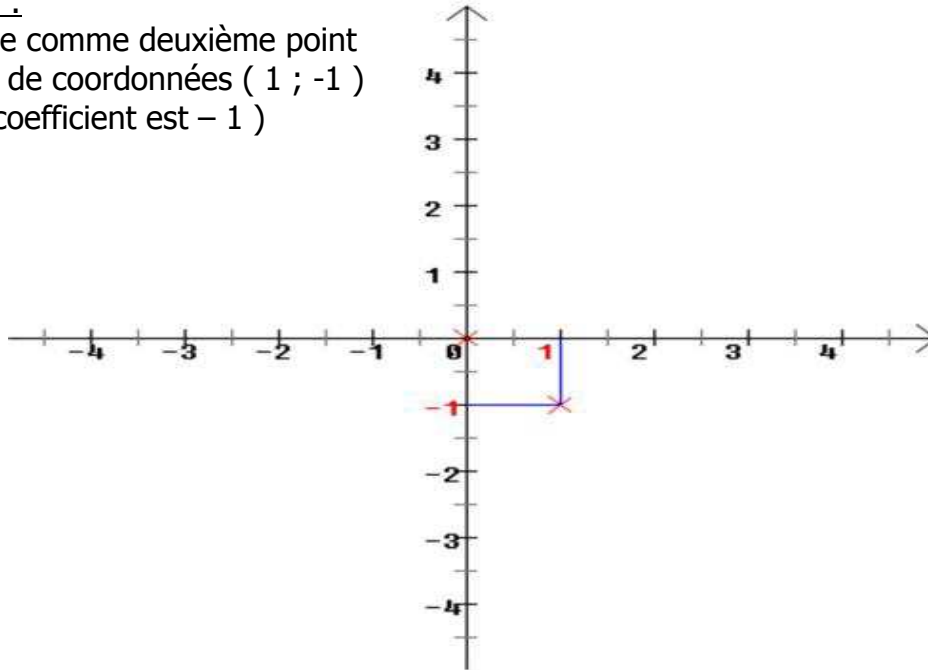
Etape 1 :

On place comme premier point
l'origine du repère :



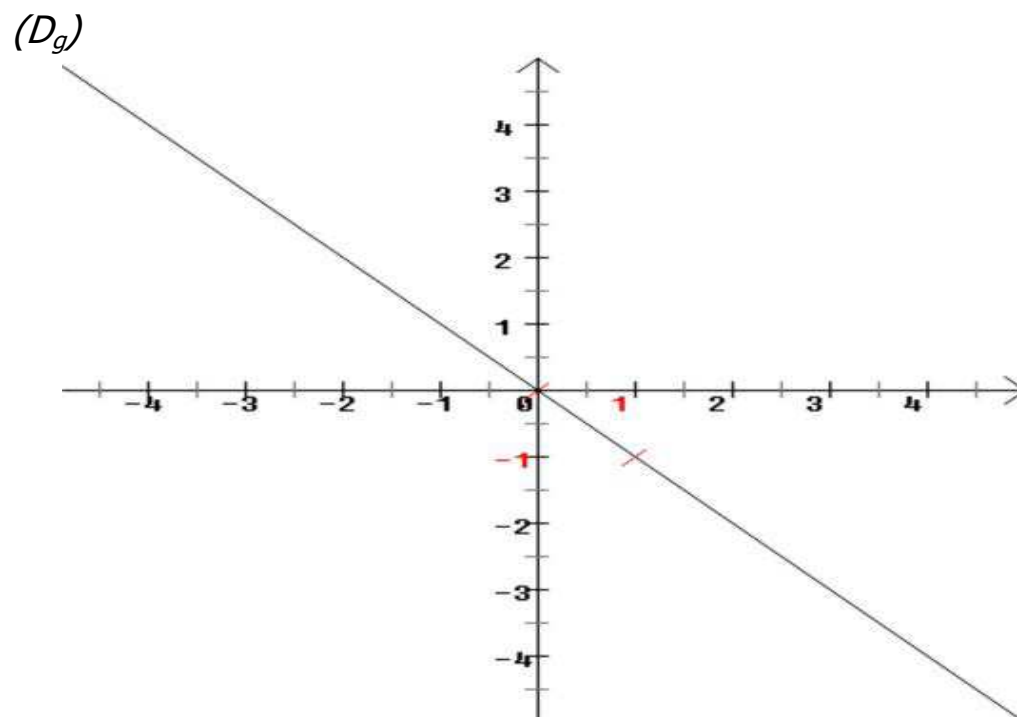
Etape 2 :

On place comme deuxième point
le point de coordonnées $(1 ; -1)$
(car le coefficient est -1)



Etape 3 :

On trace la droite passant par ces deux points et on est super content !



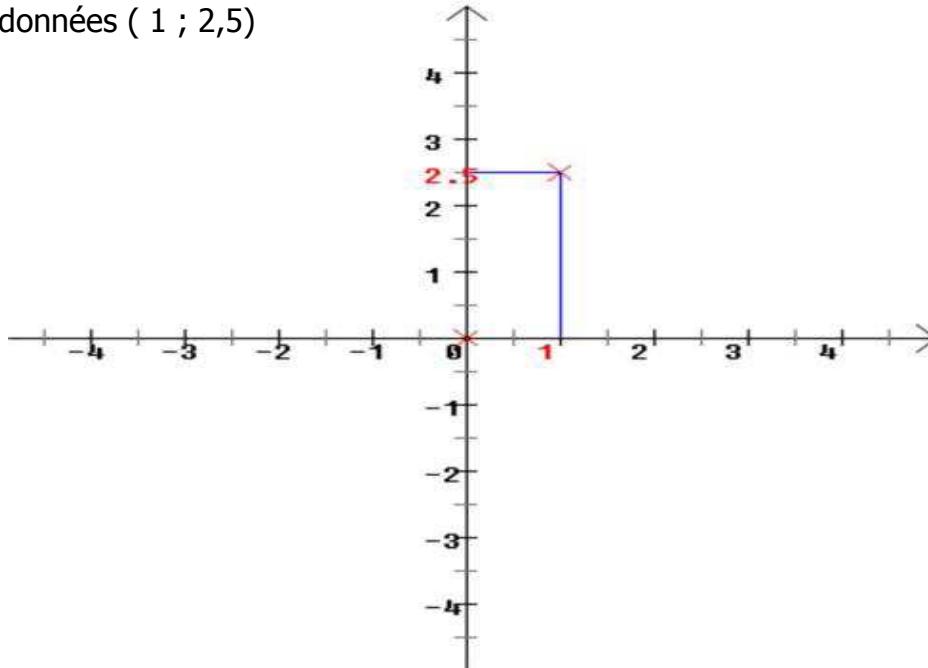
Exemple 3 :

Tracer la représentation graphique de $k : x \mapsto 2,5x$

Encore une fois, il s'agit bien d'une fonction linéaire de coefficient 2,5.

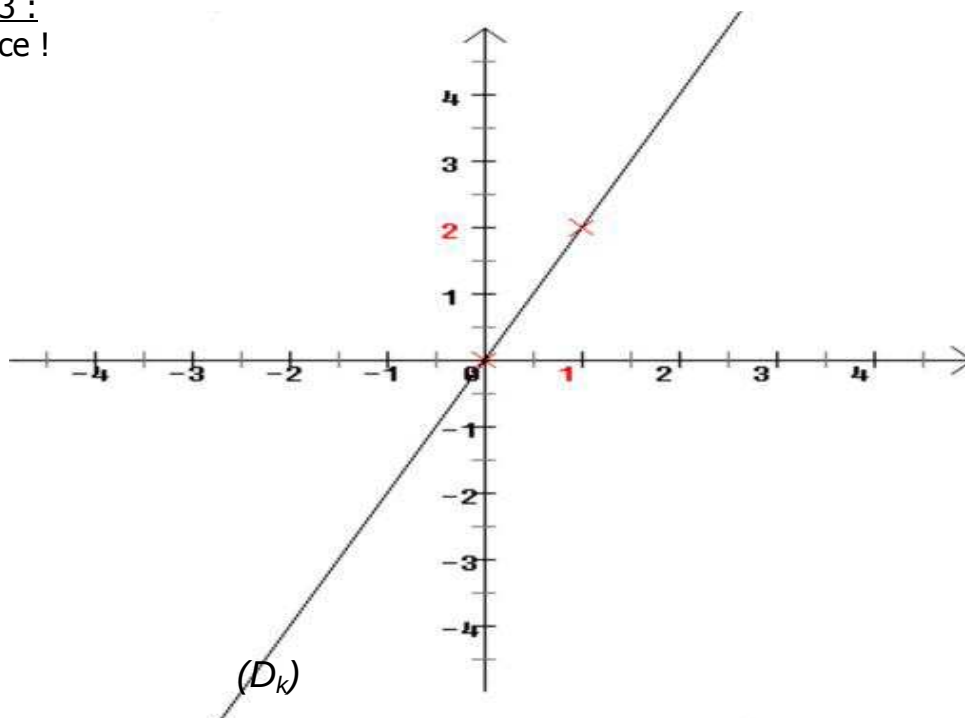
Etales 1 et 2 :

On place comme points l'origine du repère et le point de coordonnées (1 ; 2,5)



Etape 3 :

On trace !



Remarques :

- Vous vous demandez sans doute pourquoi on place le point (1 ; a) où a est le coefficient de la fonction linéaire ? Tout simplement parce que si on remplace x par 1 dans la formule ax on trouve : $ax = a \times 1 = a$... donc le point de coordonnées (1 ; a) appartient forcément à la droite représentant la fonction linéaire...
- Vous avez sans doute remarqué, avec votre sens de l'observation incroyable que la Terre vous envie, que si le coefficient est positif, la droite « monte » quand on se déplace de la gauche vers la droite... Et que si le coefficient est négatif, la droite « descend » quand on se déplace de la gauche vers la droite... Retenez-le ça vous évitera pas mal d'erreurs de tracés...

Exemple 4 :

Tracer la représentation graphique de la fonction $m : x \mapsto \frac{2}{3}x$

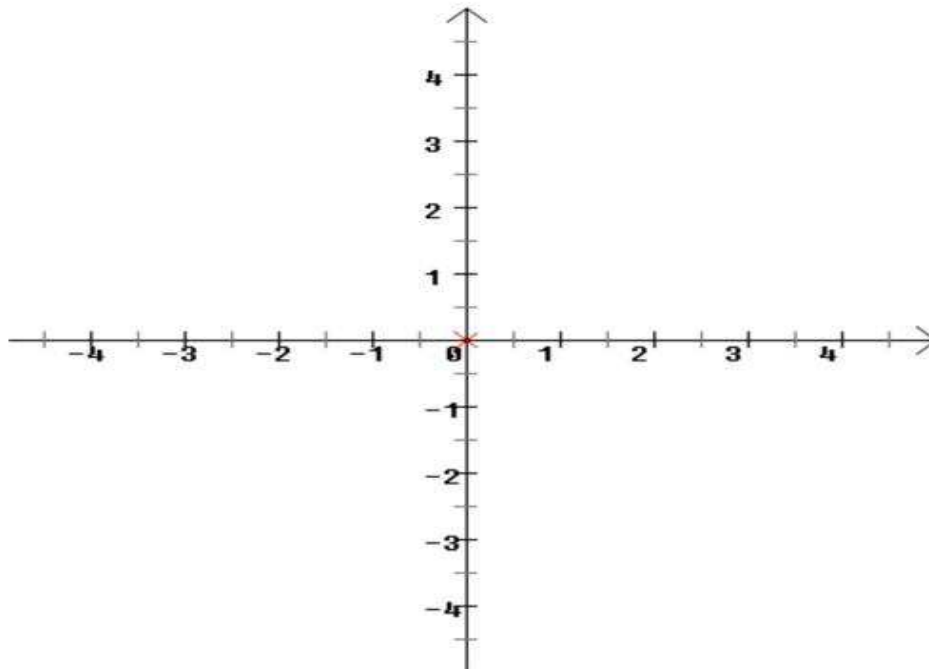
(Alors ici on se retrouve dans un cas particulier : le coefficient est $\frac{2}{3}$...

mais $\frac{2}{3} \approx 0,66667$.

Pensez-vous que nous pouvons placer précisément un point de coordonnées (1 ; 0,66667) dans le repère ? Non, on ne pourra pas le faire précisément. Alors ici on va utiliser la fraction $\frac{2}{3}$ pour arriver à placer correctement le deuxième point...)

Etape 1 :

Comme avant, on place l'origine du repère comme premier point... ça ça ne change pas...



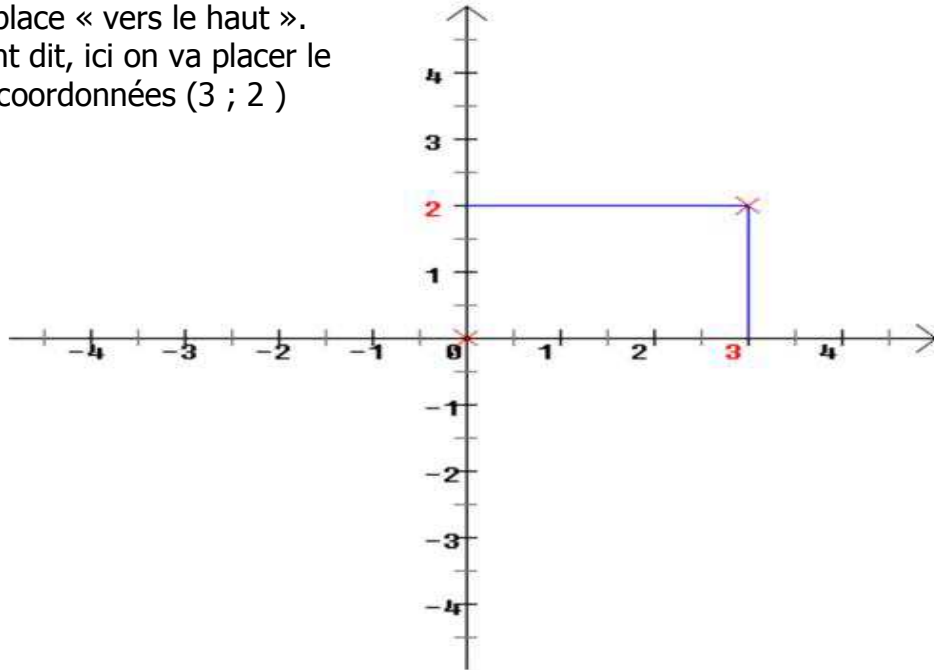
Etape 2 :

Comme je le disais avant, on ne va pas travailler avec la valeur 0,66667 qui ne peut être placé précisément.

Alors je vous donne la méthode à utiliser dans ce cas :

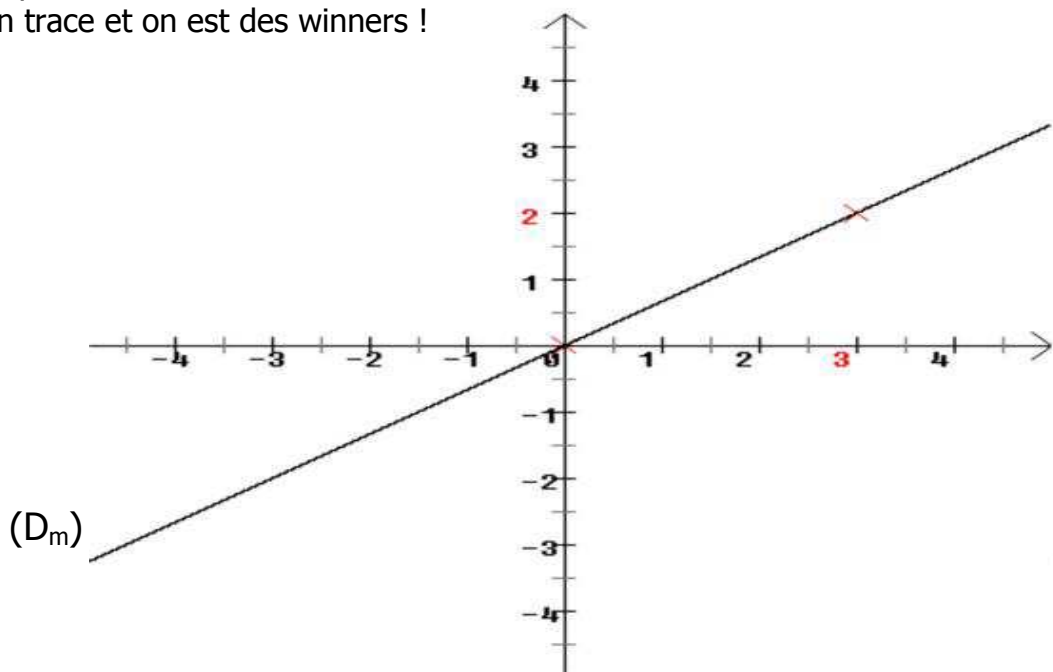
On regarde la fraction $\frac{2}{3}$ et on retient que le dénominateur, 3 ici, vous indique de combien d'unités vous aller vous déplacer en partant de l'origine sur l'axe des abscisses, l'axe horizontal. Le numérateur, 2 ici, vous indique de combien d'unités vous allez vous déplacer sur l'axe des ordonnées, l'axe vertical. Comme 2 est positif, on se déplace « vers le haut ».

Autrement dit, ici on va placer le point de coordonnées (3 ; 2)



Etape 3 :

On trace et on est des winners !



Remarque :

Pourquoi cela marche ? Remplaçons x par 3 dans la formule de la fonction $\frac{2}{3}x$:

$\frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ (car les 3 se barrent...) et donc le point de coordonnées (3 ; 2) est sur la droite...

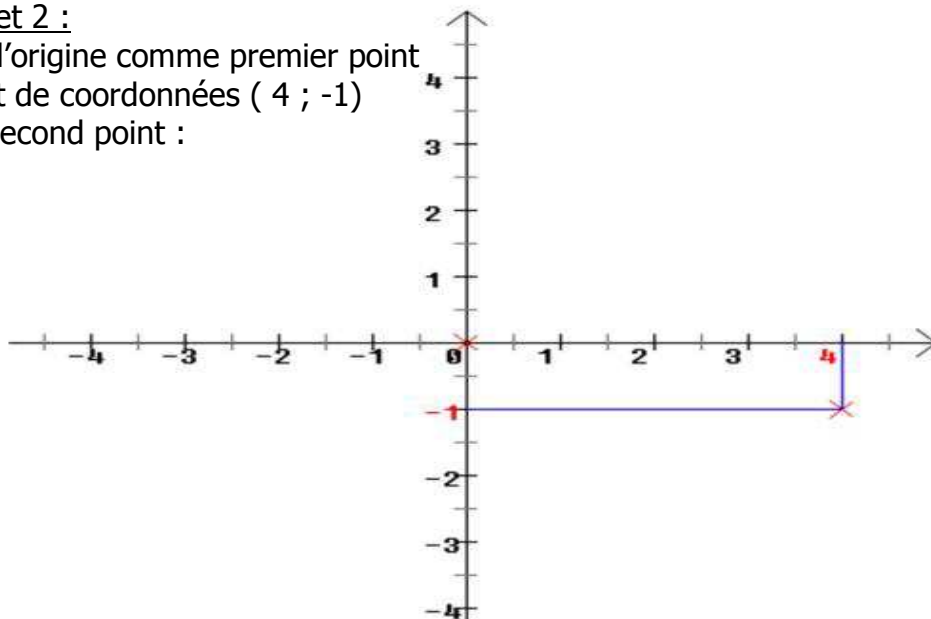
Exemple 5 :

Tracer la représentation graphique de la fonction $p : x \mapsto -\frac{1}{4}x$

(ici $-\frac{1}{4} = -0,25$ valeur « difficile » à placer précisément sur le repère...)

Etapes 1 et 2 :

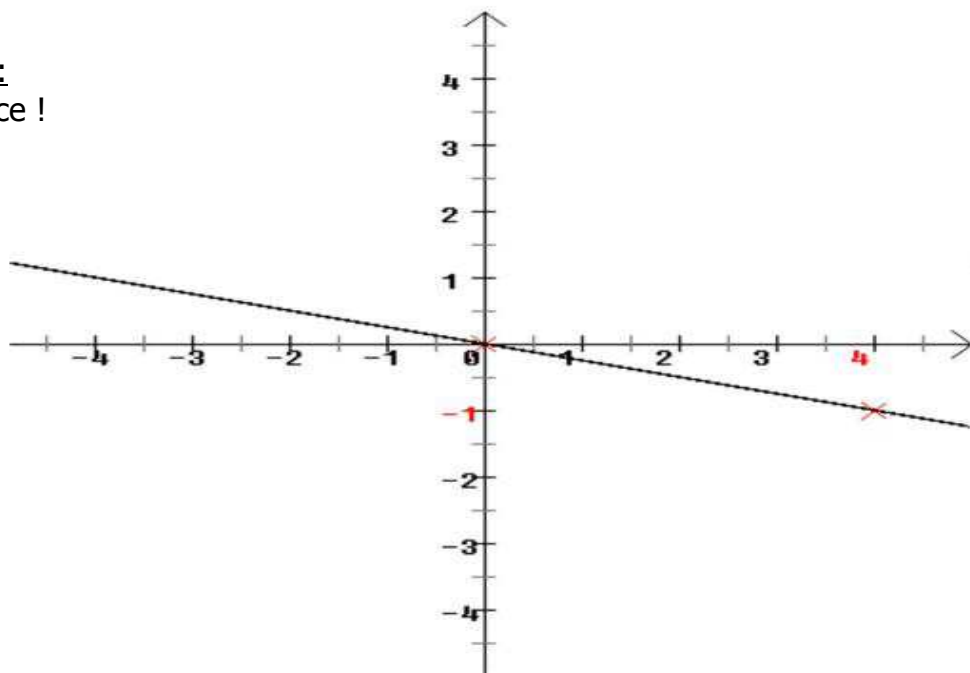
On place l'origine comme premier point
et le point de coordonnées (4 ; -1)
comme second point :



($-\frac{1}{4}$ signifie 4 en abscisse et -1 en ordonnée... comme je l'ai expliqué avant...)

Etape 3 :

On... trace !



Remarque :

- La méthode utilisée pour les coefficients en fraction fonctionnent aussi pour les autres exemples.
En effet, si on reprend le premier exemple $f : x \mapsto 2x$, le coefficient est 2 c'est à dire : $\frac{2}{1}$ et donc on place le point de coordonnées (1 ; 2)...
- Pour vous rappeler comment placer le second point à l'aide d'une fraction $\frac{a}{b}$ il suffit de le retenir ainsi : « en partant de l'origine on se déplace de a en ordonnées pour b en abscisse ».

II. Représentations graphiques des fonctions affines :

Si on trace plusieurs fonctions affines à l'aide d'un tableau, on remarquerait toujours la même chose... C'est que nous dit cette propriété :

- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite ne passant pas par l'origine.

Et la réciproque est vraie aussi :

- Si la représentation graphique d'une fonction est une droite ne passant pas par l'origine, alors cette fonction est une fonction affine.

Pour représenter des fonctions affines, il nous suffira donc de placer deux points appartenant à la droite les représentant.

Le tracé de la représentation graphique d'une fonction affine est donc assez simple, et on va voir tout de suite plusieurs exemples avec certains cas particuliers...

Dans ces exemples on va tracer des fonctions $x \mapsto ax + b$ où **a** et **b** sont des valeurs fixées.

Le nombre a est appelé coefficient (directeur) de la fonction affine, et le nombre b est appelé ordonnée à l'origine (vous allez comprendre pourquoi...)

Si vous avez compris comment on fait pour représenter graphiquement une fonction linéaire, vous allez voir que c'est quasiment la même méthode qu'on utilise pour tracer une fonction affine. La seule différence est que le premier point qu'on va placer ne sera pas l'origine. Pour le deuxième point on fera comme avant mais en considérant le premier point comme « origine » relative...

Exemple 1 :

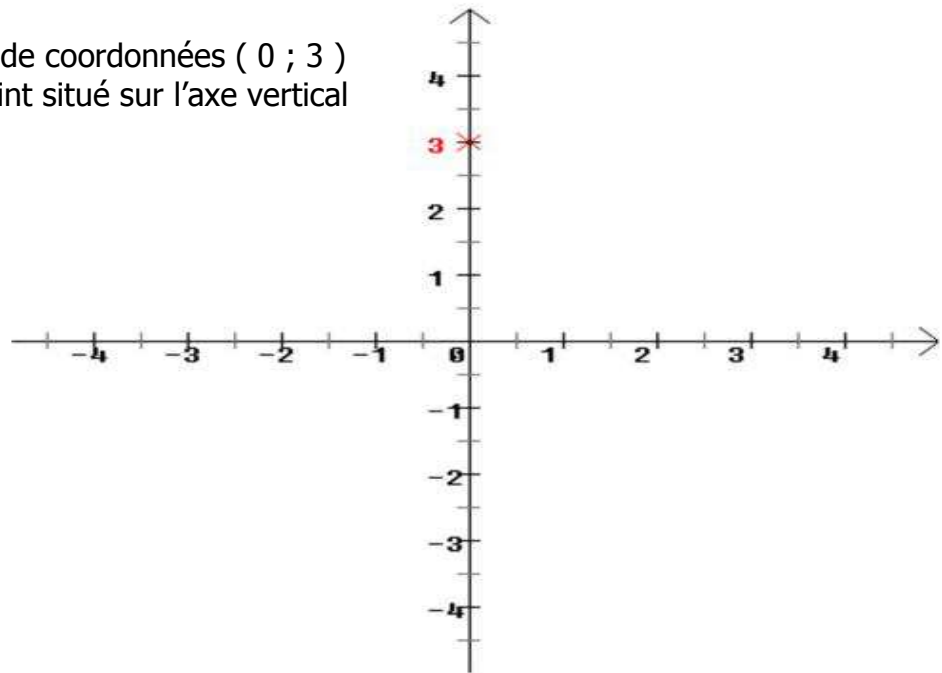
Tracer la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -2x + 3$

Il s'agit bien d'une fonction affine. Le coefficient est -2 et l'ordonnée à l'origine est 3 .

Etape 1 :

(Pour une fonction linéaire le premier point était l'origine, ici le premier point dépend de l'ordonnée à l'origine, c'est à dire 3)

On place le point de coordonnées $(0 ; 3)$
(c'est à dire le point situé sur l'axe vertical
à l'ordonnée $+3$)



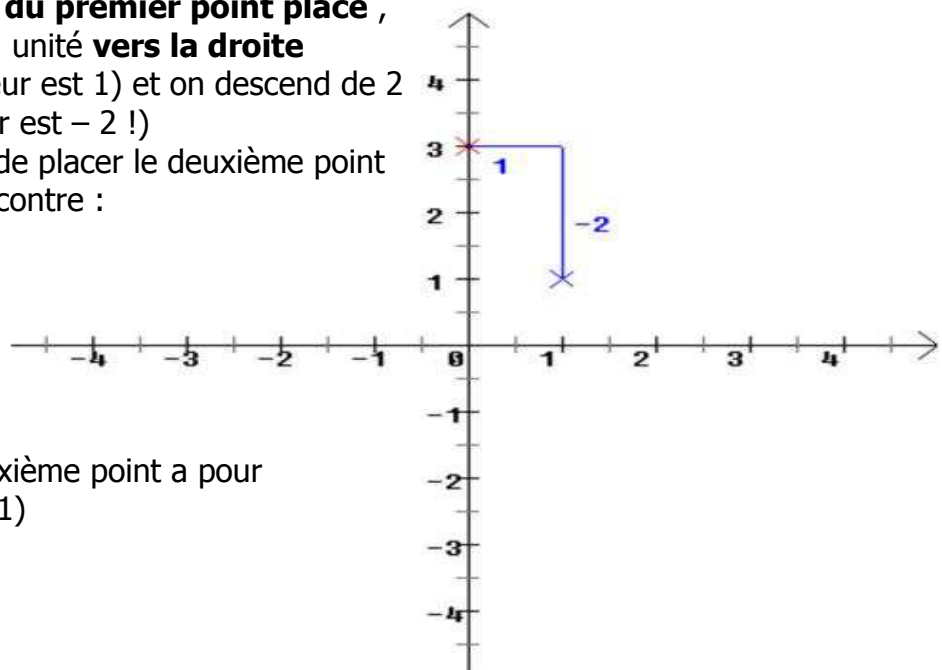
Etape 2 :

On va utiliser la technique utilisée pour les fonctions linéaires lorsque le coefficient était fractionnaire.

Ici le coefficient est -2 , c'est à dire $-\frac{2}{1}$.

Donc, **en partant du premier point placé**,
on se déplace de 1 unité **vers la droite**
(car le dénominateur est 1) et on descend de 2
(car le numérateur est -2 !)

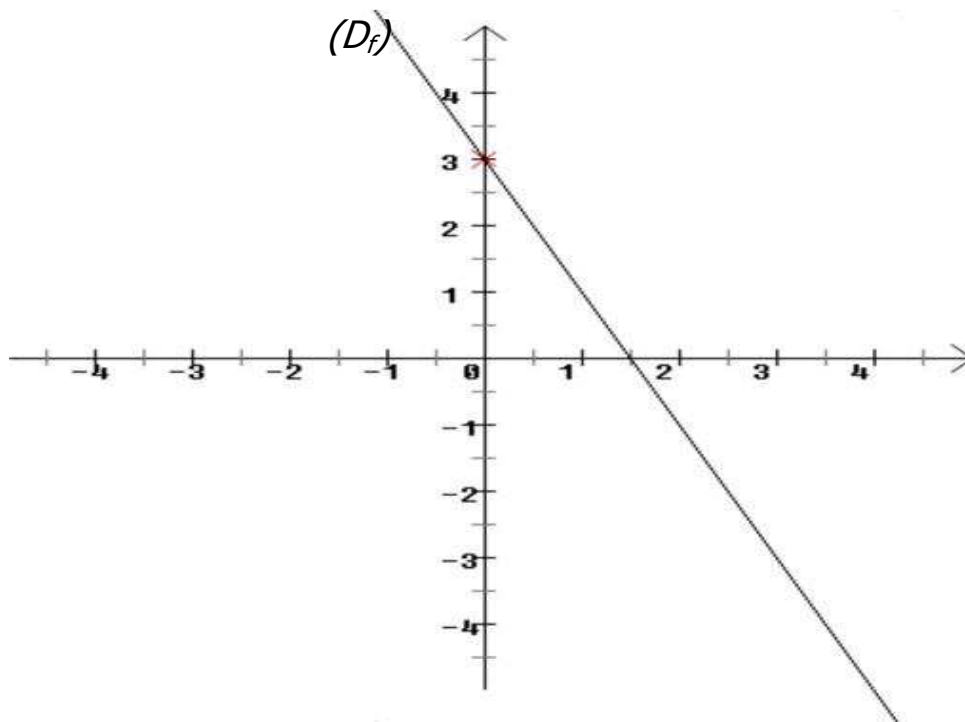
Cela nous permet de placer le deuxième point
comme indiqué ci-contre :



On voit que le deuxième point a pour
coordonnées $(1 ; 1)$

Etape 3 :

Il n'y a plus qu'à tracer la droite passant par ces deux points



Remarques :

- Vous voyez pourquoi le nombre +3 est appelé ordonnée à l'origine ? Non ? C'est parce que ce nombre correspond à l'endroit où la droite va couper l'axe des ordonnées au-dessus de l'origine...
- Et pourquoi ce point appartient-il à la droite représentant la fonction ? Parce que si vous prenez comme abscisse 0 alors avec la formule $ax + b$ on trouve :
 $a \times 0 + b = 0 + b = b$... Donc le point de coordonnées $(0 ; b)$ appartient bien à la droite...

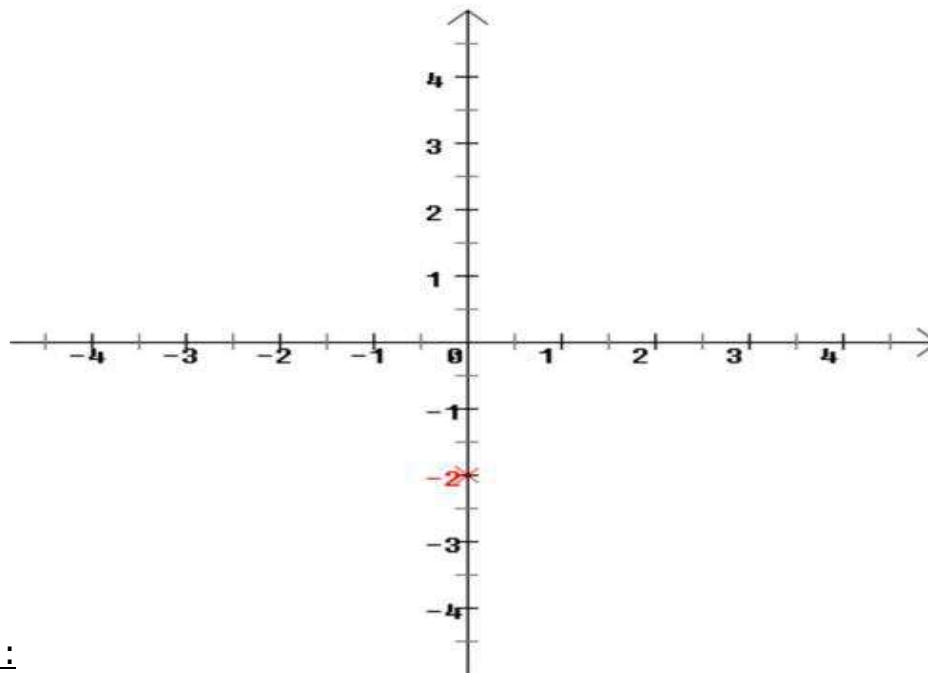
Exemple 2 :

Tracer la représentation graphique de la fonction : $e : x \mapsto x - 2$

Encore une fois, il s'agit bien d'une fonction linéaire de coefficient 1 (car $x = 1x$) et d'ordonnée à l'origine -2 , donc on va obtenir une droite ne passant pas par l'origine.

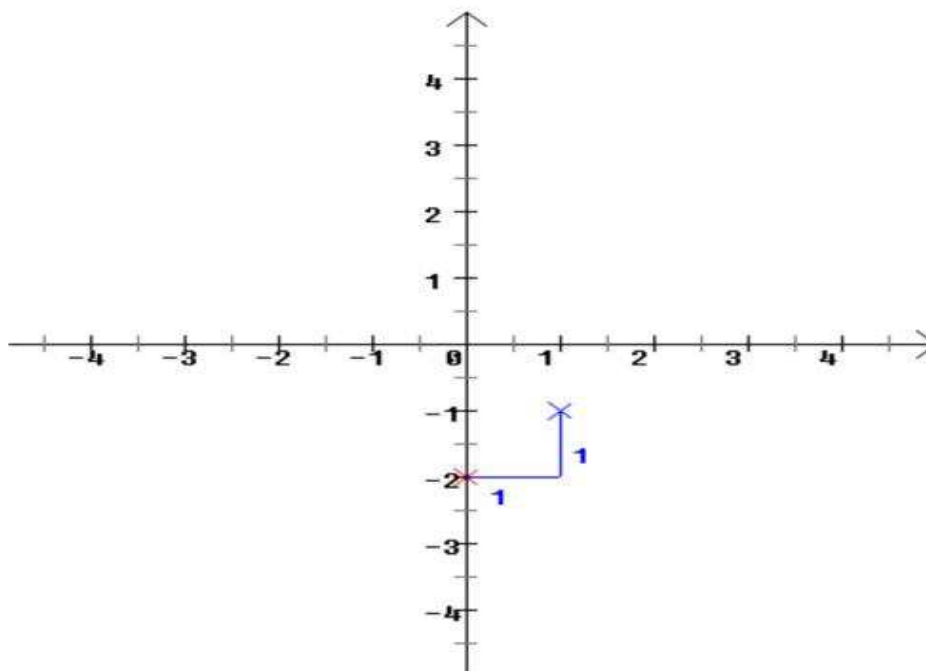
Etape 1 :

On place le premier point de coordonnées $(0 ; -2)$



Etape 2 :

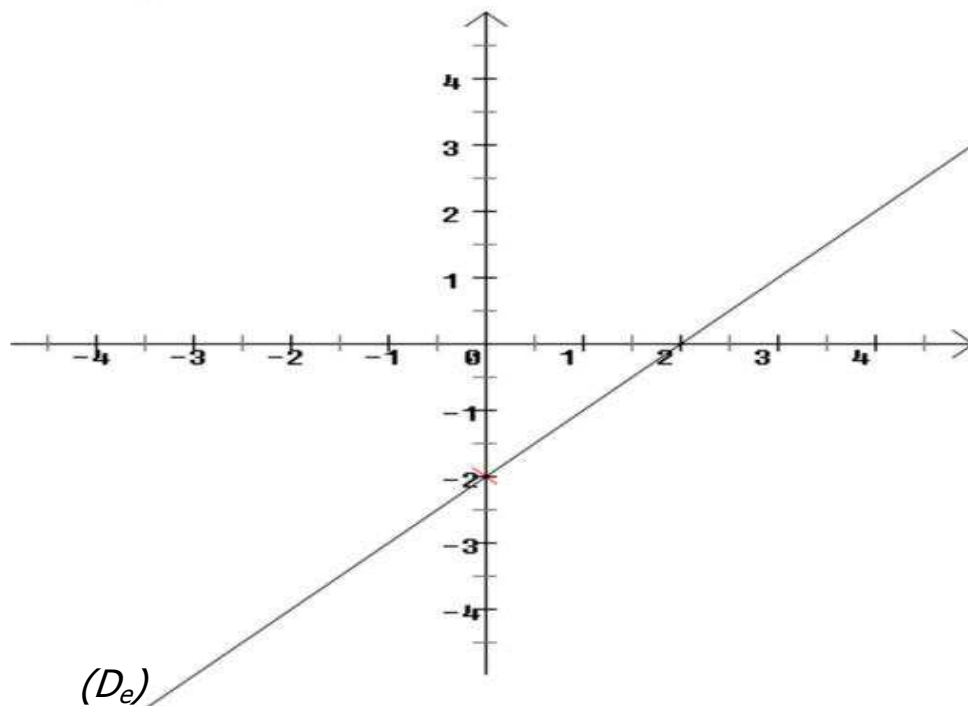
Le coefficient est 1, c'est à dire $\frac{1}{1}$. Donc on place un deuxième point obtenu en partant du premier et en se déplaçant de 1 unité vers la droite et en montant de 1 unité vers le haut (car le coefficient est positif !)



(On voit que le deuxième point aura pour coordonnées (1 ; -1))

Etape 3 :

On trace la droite passant par ces deux points !



Il reste maintenant à voir comment on va faire lorsque le coefficient est fractionnaire et n'est pas utilisable sous forme décimale... Et vous allez voir, encore une fois, qu'il suffit d'appliquer correctement ce que je vous ai expliqué pour les fonctions linéaires...

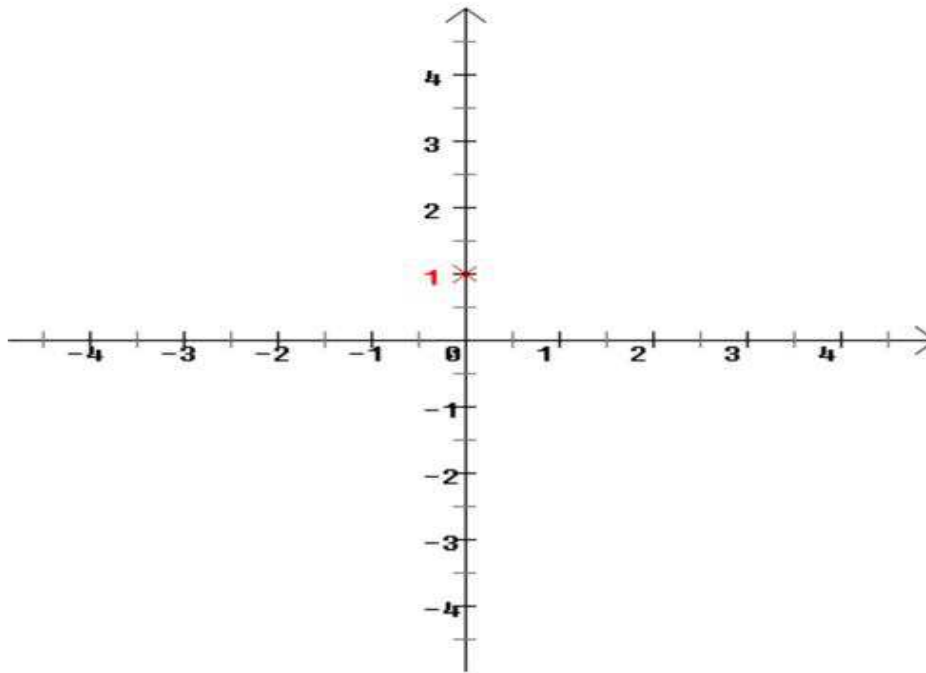
Exemple 3 :

Tracer la représentation graphique de la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{3} + 1$

C'est bien une fonction affine de coefficient $\frac{1}{3}$ (car $\frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$) et d'ordonnée à l'origine 1.

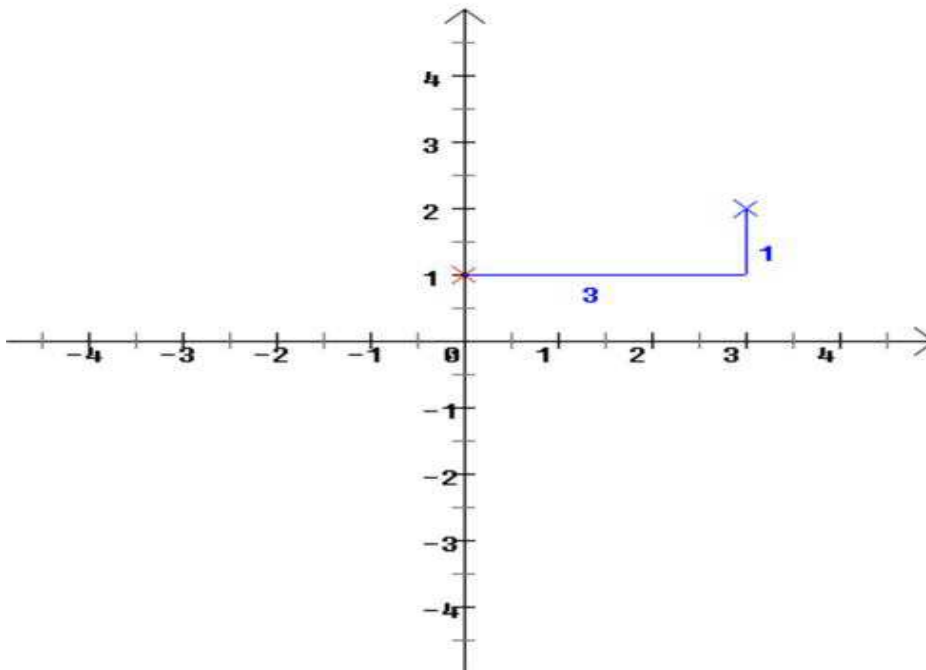
Etape 1 :

On place le premier point de coordonnées $(0 ; 1)$



Etape 2 :

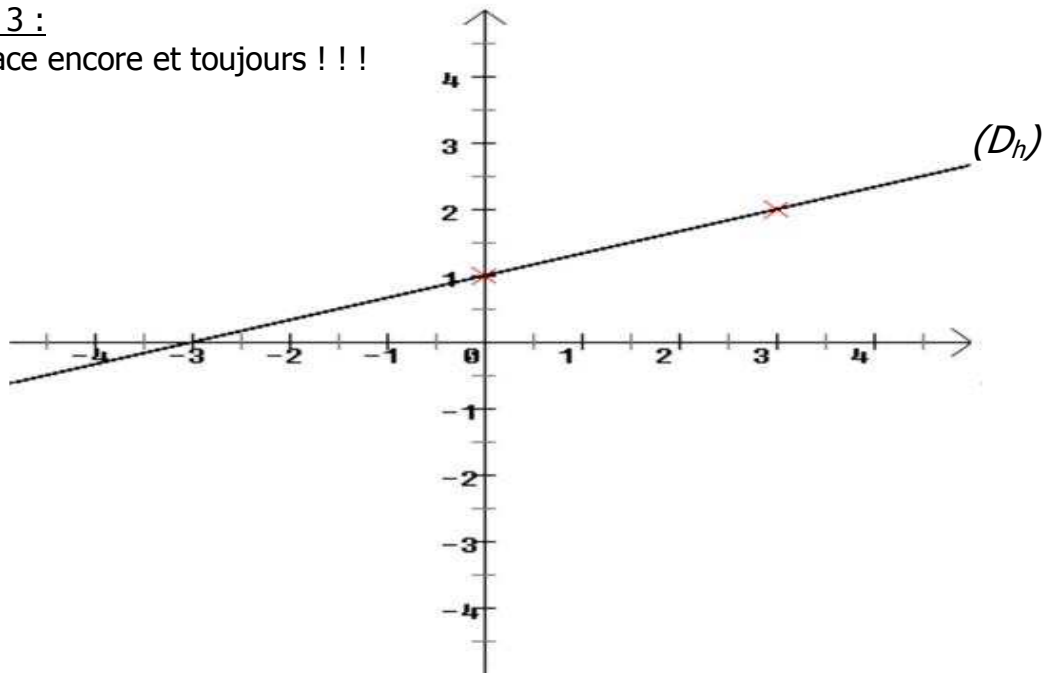
Le coefficient est $\frac{1}{3}$ donc en partant du premier point, on se déplace de 3 unités vers la droite et on monte de 1 unité... et on obtient notre deuxième point !



(Et le deuxième point a donc pour coordonnées (3 ; 2))

Etape 3 :

On trace encore et toujours !!!



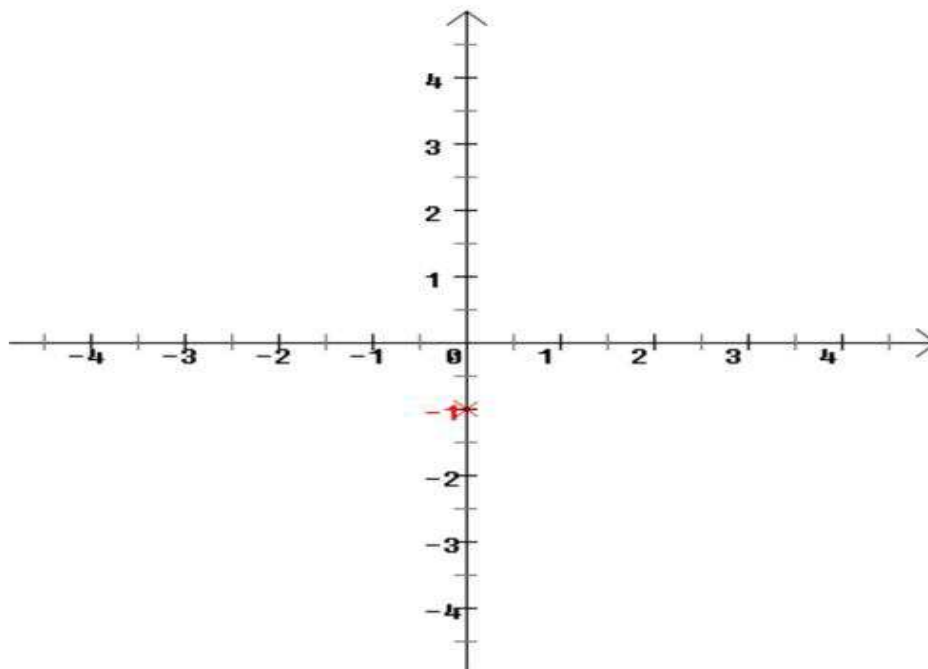
Exemple 4 :

Tracer la représentation graphique de la fonction $b : x \mapsto \frac{-2}{3}x - 1$

Fonction affine de coefficient $-\frac{2}{3}$ et d'ordonnée à l'origine -1 .

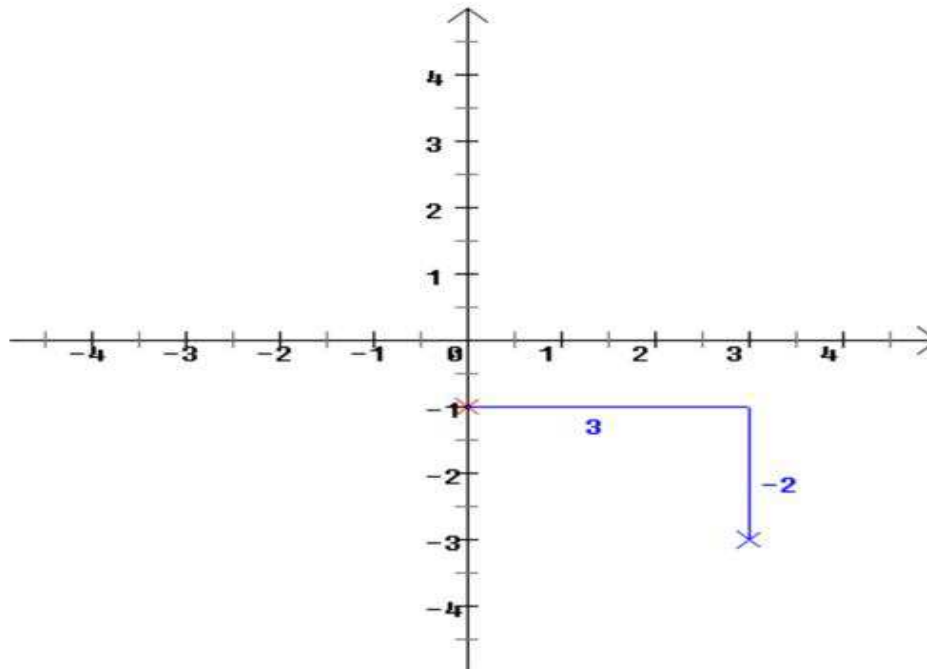
Etape 1 :

On place le point de coordonnées $(0 ; -1)$



Etape 2 :

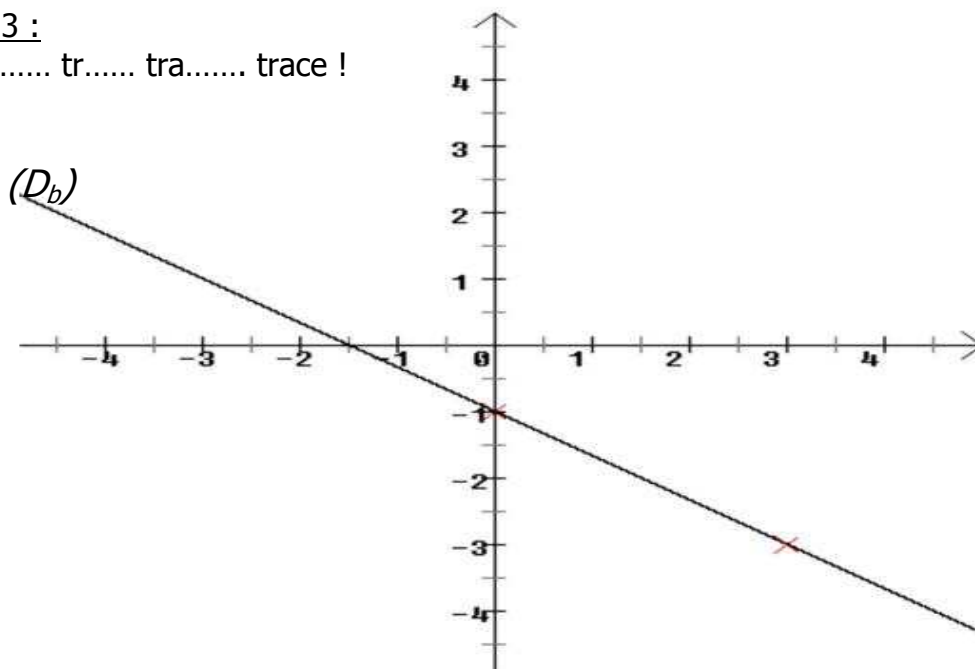
Le coefficient étant $-\frac{2}{3}$, on part du premier point et on se déplace de 3 unités vers la droite et on descend de 2 unités pour obtenir le deuxième point...



(Et le deuxième point a pour coordonnées (3 ; -3))

Etape 3 :

On... t..... tr..... tra..... trace !

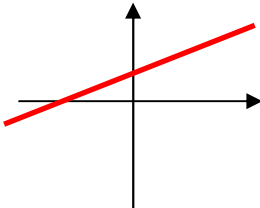
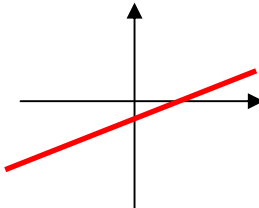
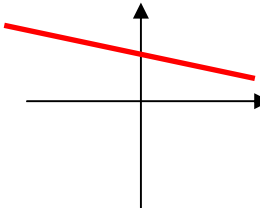
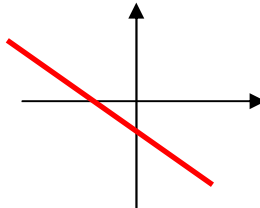


Remarque :

Il faut bien faire attention aux signes de l'ordonnée à l'origine et du coefficient ! En clair :

- Le signe du coefficient indique si la droite monte ou descend quand on se déplace de la gauche vers la droite.
- L'ordonnée à l'origine permet de savoir si la droite coupe l'axe vertical en dessous de l'axe horizontal ou au dessus.

Pour résumer :

			
<i>Coefficient >0 Ordonnée à l'origine >0</i>	<i>Coefficient >0 Ordonnée à l'origine <0</i>	<i>Coefficient <0 Ordonnée à l'origine >0</i>	<i>Coefficient <0 Ordonnée à l'origine <0</i>

III. Représentations graphiques des fonctions constantes :

Normalement je n'ai rien à vous expliquer car si vous savez tracer des fonctions affines vous arrivez à tracer des fonctions constantes (car une fonction constante est une fonction affine de coefficient nul...) Néanmoins, on peut les tracer plus simplement et rapidement qu'en utilisant bêtement les techniques précédentes...

Si on trace plusieurs fonctions constantes à l'aide d'un tableau, on remarquerait toujours la même chose... C'est ce que nous dit cette propriété :

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• La représentation graphique d'une fonction constante est une parallèle à l'axe des abscisses. |
|---|

(Autrement dit c'est une droite « horizontale »...)

Et la réciproque est vraie aussi :

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Si la représentation graphique d'une fonction est une droite parallèle à l'origine, alors cette fonction est une fonction constante. |
|--|

Je vous explique rapidement comment on fait . C'est ici que ça se passe :

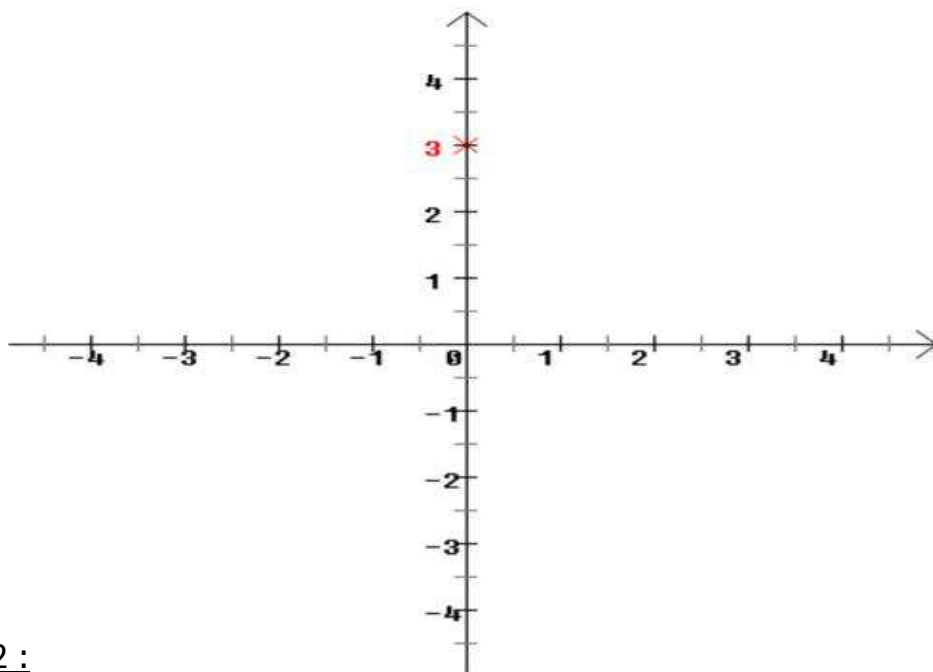
Exemple 1 :

Tracer la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 3$

Puisque c'est bien une fonction constante égale à 3, on va obtenir une droite parallèle à l'axe des abscisses. Un seul point suffit donc à aider à son tracé...

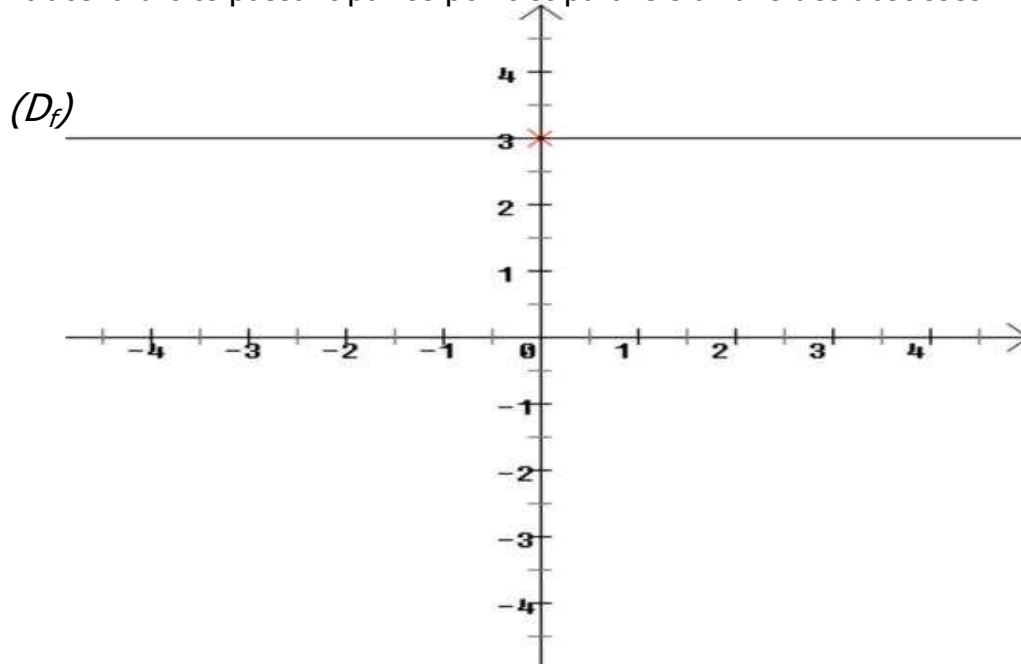
Etape 1 :

On place le point de coordonnées (0 ; 3) (comme pour les fonctions affines car la formule de la fonction f est identique à : $0x + 3$)



Etape 2 :

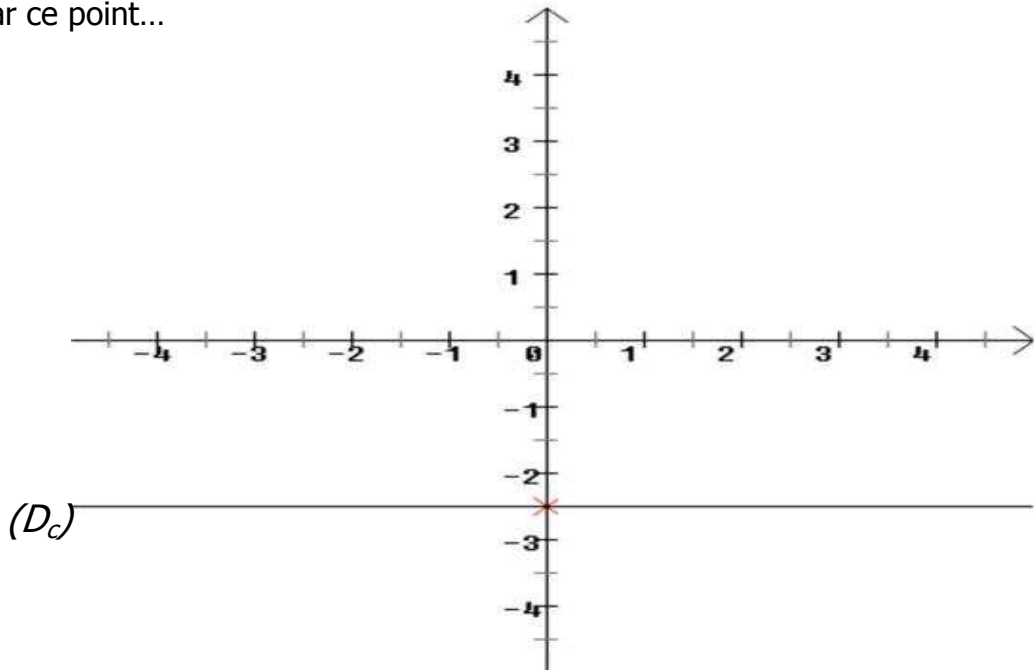
On trace la droite passant par ce point et parallèle à l'axe des abscisses...



Exemple 2 :

Tracer la représentation graphique de la fonction $c : x \mapsto -2,5$

On place le point de coordonnées $(0 ; -2,5)$ et on trace la droite horizontale passant par ce point...

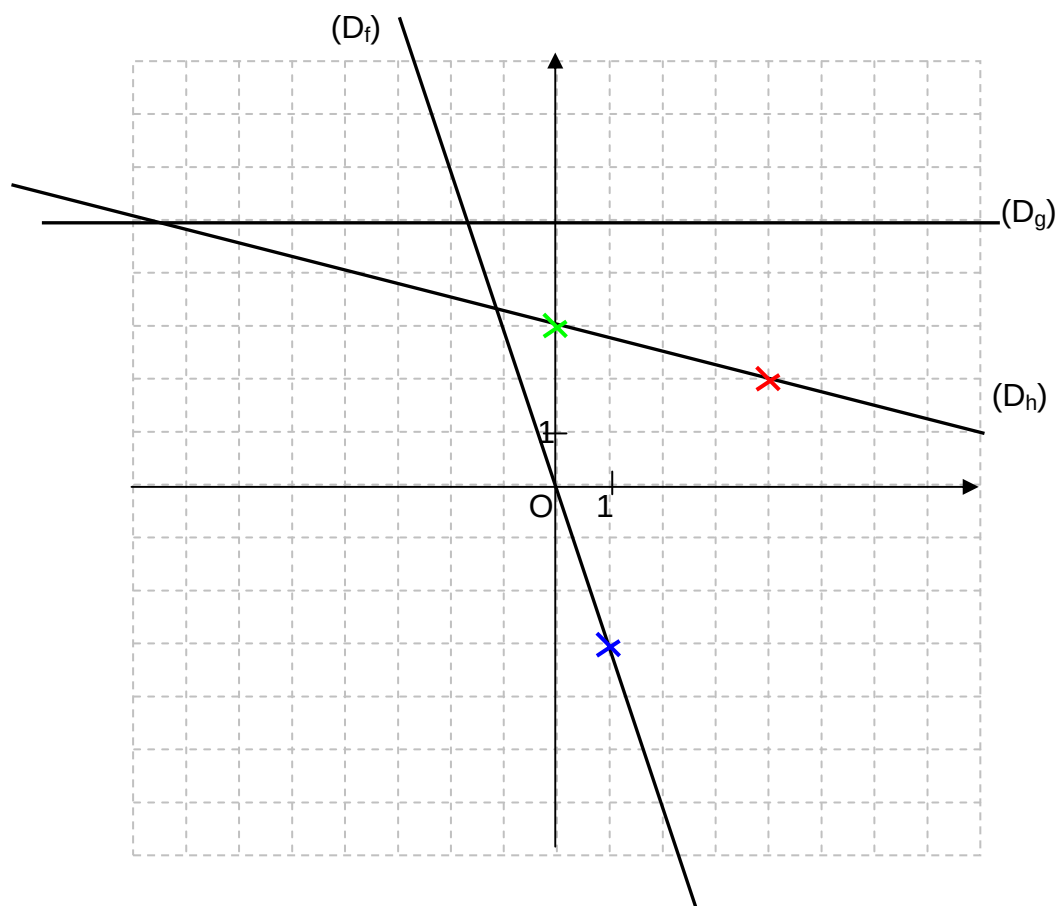


IV. Retrouver une fonction à partir de sa droite :

Maintenant que vous savez tracer des courbes représentant des fonctions affines, linéaires ou constantes, vous devez aussi être capables de les repérer sur un dessin et de retrouver ce qui caractérise cette fonction (son coefficient, son ordonnée à l'origine...)

Je vous montre sur un exemple comment on fait. On considère la figure qui suit sur laquelle on a tracé trois droites représentant trois fonctions f , g et h .

On va retrouver de quel type de fonction il s'agit et on va essayer de les retrouver :



- La droite (D_g) est une droite parallèle à l'axe des abscisses. Elle représente donc une **fonction constante**. Comme cette droite coupe l'axe des ordonnées en +5, on retrouve donc : $g : x \mapsto 5$
- La droite (D_f) est une droite passant par l'origine. Il s'agit donc d'une fonction linéaire. Pour retrouver son coefficient, on va essayer de retrouver « en fraction » ce coefficient en utilisant un point de la droite ayant des coordonnées entières. Le point de coordonnées $(1 ; -3)$ est sur la droite (D_f) (il est marqué en bleu sur la figure précédente. Vous pouvez prendre n'importe quel point de la droite pourvu que vous arriviez à lire précisément ses coordonnées...)
On calcule alors : $\frac{-3}{1} = -3$ (On divise son ordonnée par son abscisse...)
La fonction f tracée est donc : $f : x \mapsto -3x$
- La droite (D_h) est une droite ne passant pas par l'origine et n'étant pas « horizontale ». La fonction h est donc une fonction affine. Il nous faut retrouver son coefficient et son ordonnée à l'origine. Pour retrouver l'ordonnée à l'origine c'est le plus simple : il suffit de regarder où la droite coupe l'axe vertical. Elle le coupe au point vert sur le graphique. Ses coordonnées sont $(0 ; 3)$, donc **l'ordonnée à l'origine de la fonction h est 3**.

Pour retrouver le coefficient directeur de la fonction, il suffit, comme pour la fonction f précédente, de trouver un deuxième point sur la droite dont les coordonnées sont entières, par exemple le point rouge que je vous ai mis dessus. Pour aller du point vert au point rouge (du premier point au deuxième) on se déplace de 4 unités vers la droite et on descend de 1 unité.

Le coefficient directeur se retrouve donc en calculant : $-\frac{1}{4}$

(Nombre d'unités vers le haut ou vers le bas avec le bon signe divisé par le nombre d'unités vers la droite...)

Donc le coefficient directeur de h est $-\frac{1}{4}$

Au final, **la fonction h tracée est donc** : $h : x \mapsto -\frac{1}{4}x + 3$

Remarque : Equations de droites

On dit que la droite (D_f) a pour équation : $y = -3x$

De même les équations des droites (D_g) et (D_h) sont :

$$(D_g) : y = 5$$

$$(D_h) : y = -\frac{1}{4}x + 3$$

(Pour donner l'équation d'une droite représentant une fonction, il suffit d'écrire $y=$ et de mettre derrière la formule de la fonction...)

Si on vous demande de représenter graphiquement une fonction $f : x \mapsto ax + b$ cela revient à vous demander de tracer la droite d'équation $y = ax + b$.

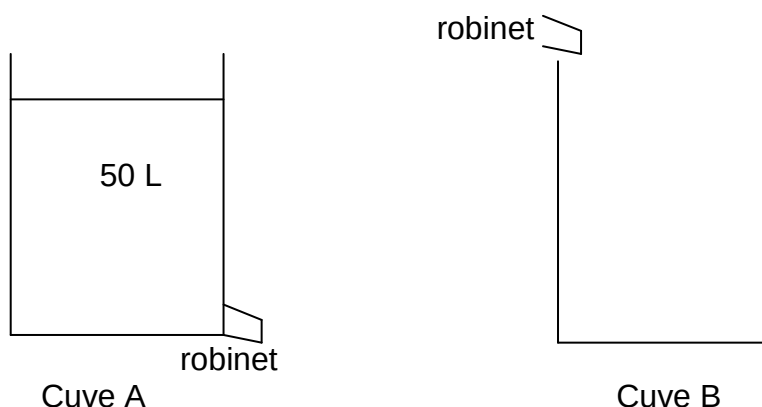
V. Un petit problème complet sur les fonctions :

On dispose de deux cuves A et B.

La cuve A contient au départ 50 L d'eau.

La cuve B est vide.

On ouvre un robinet dans la cuve A pour la vider. Elle perd alors 5 L d'eau par minute. Au même moment on ouvre un robinet pour remplir la cuve B. Celle-ci se remplit alors à la vitesse de 4 L par minute.



- 1) Soit f la fonction représentant le volume d'eau contenu dans la cuve A en fonction du temps écoulé en minutes, et soit g la fonction représentant le volume d'eau contenu dans la cuve B en fonction du temps écoulé en minutes. Donner les expressions de ces deux fonctions :
- 2) Quelles types de fonctions sont les fonctions f et g ?
- 3) Déterminer à l'aide de g le volume d'eau contenu dans la cuve B au bout de 6 minutes :
- 4) Déterminer à l'aide de f le temps qu'il faut pour que la cuve A contienne 42 L :
- 5) Déterminer au bout de combien de minutes les deux cuves contiennent la même quantité d'eau.
- 6) Représenter graphiquement les fonctions f et g dans le repère orthogonal suivant en prenant comme unités 1 carreau pour 2 minutes en abscisse et 1 carreau pour 5 L en ordonnée. Retrouver graphiquement la réponse de la question 5.

Solution :

- 1) Si on appelle t le temps écoulé en minutes, alors la cuve A contient 50 L au début, puis 50 – 5 L après 1 minute, puis 50 – 5 X 2 L après 2 minutes, etc.
La fonction f est donc : $f : t \mapsto 50 - 5t$

La cuve B contient 0 L au début (elle est vide), puis 4 L au bout d'une minute, puis 2 X 4 L au bout de deux minutes, etc.
La fonction g est donc : $g : t \mapsto 4t$

- 2) La fonction f est une fonction affine de coefficient – 5 et d'ordonnée à l'origine 50
La fonction g est une fonction linéaire de coefficient 4.

- 3) Pour savoir ce que contiennent les deux cuves au bout de 6 minutes on calcule :
 $f(6) = 50 - 5 \times 6 = 50 - 30 = 20$
 $g(6) = 4 \times 6 = 24$
Donc la cuve A contient 20 L et la cuve B 24 L.

- 4) On cherche t tel que $f(t) = 42$.
On cherche t tel que $50 - 5t = 42$
On va résoudre cette équation :

$$\begin{aligned}
 50 - 5t &= 42 \\
 50 - 5t - 50 &= 42 - 50 \\
 -5t &= -8 \\
 \frac{-5t}{-5} &= \frac{-8}{-5} \\
 d'où \quad t &= 1,6
 \end{aligned}$$

Donc la cuve A contiendra 42 L au bout de 1,6 minutes.
(c'est à dire au bout de 1 min + 0,6 X 60 s = 1 min 36 s)

- 5) On cherche t tel que $f(t) = g(t)$

On cherche donc t tel que $50 - 5t = 4t$

On va résoudre cette équation :

$$50 - 5t = 4t$$

$$50 - 5t + 5t = 4t + 5t$$

$$50 = 9t$$

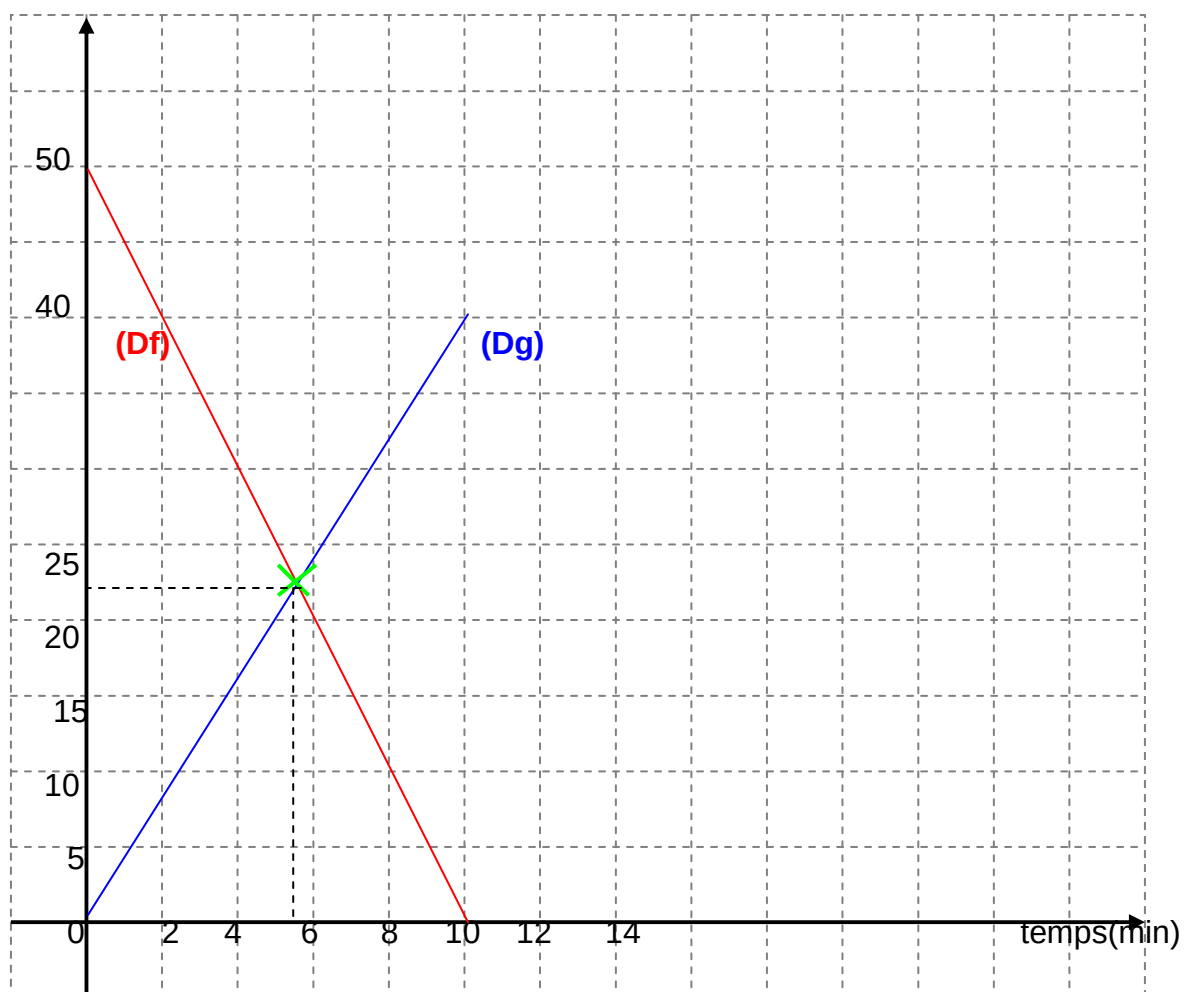
$$\frac{9t}{9} = \frac{50}{9}$$

$$\text{d'où } t = \frac{50}{9} \approx 5,56 \text{ (min)}$$

Il faudra donc environ 5,56 minutes pour que les deux cuves contiennent la même quantité d'eau.

(C'est à dire environ $5\text{min} + 0,56 \times 60 \text{ s} \approx 5 \text{ min } 34 \text{ s}$)

6) volume (L)



(Ici on a tracé la droite bleu en utilisant le fait que c'était la représentation graphique d'une fonction linéaire et qu'au bout de 10 minutes on avait 40 L d'eau.

Pour la droite rouge, on a une fonction affine d'ordonnée à l'origine 50... et qu'au bout de 2 minutes elle en contenait 40...

On remarque aussi que le temps étant positif et le volume aussi on a seulement des coordonnées positives et pas négatives...)

Pour retrouver par lecture graphique la réponse de la question 5, on cherche le point d'intersection des deux droites (*en vert sur le graphique*).

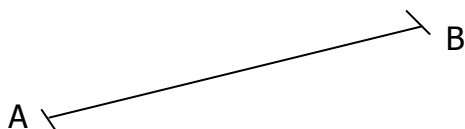
On voit que son abscisse est bien environ 5,5 (min) et son ordonnée est environ 22,5 (L). (grâce aux lignes en pointillés...)

Tout ce qui est
géométrique...

QUELQUES SYMBOLES & NOTATIONS EN GEOMETRIE

Quelques petits rappels de base... mais alors vraiment de base.

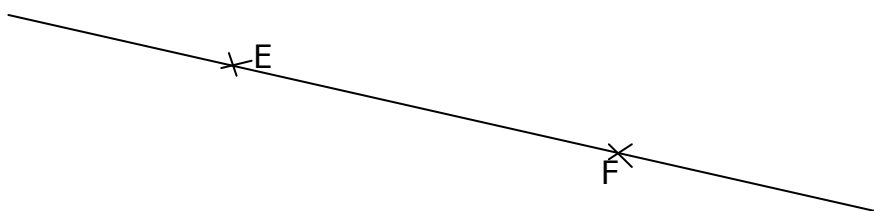
- Segment :



Ceci est un segment d'extrémités A et B. On le note $[AB]$ ou $[BA]$.

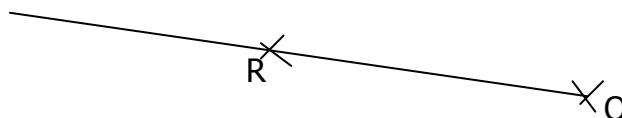
La longueur de ce segment est notée AB ou BA . C'est la distance entre les points A et B.

- Droite :



Ceci est une droite passant par E et F. On la note (EF) ou (FE)

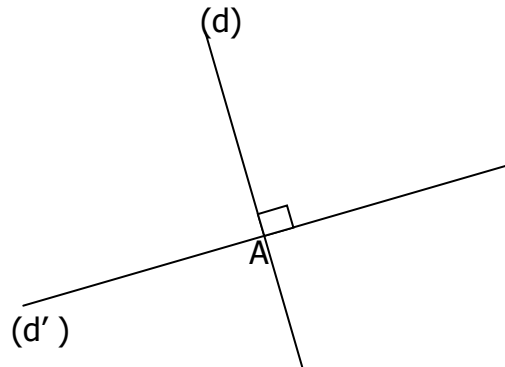
- Demi-droite :



Ceci est une demi-droite d'origine O passant par R. On la note $[OR)$.

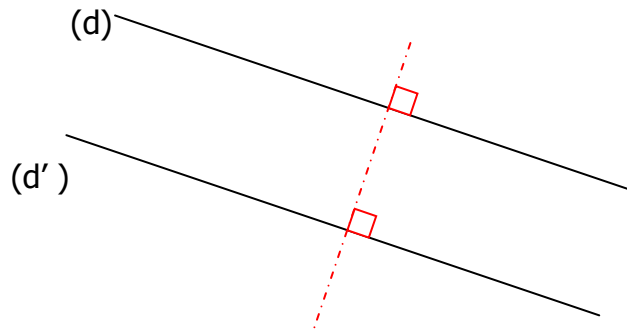
A ne pas confondre avec la demi-droite $[RO)$ qui part de R passe par O et continue vers la droite.

- Droites perpendiculaires :



Ici les droites (d) et (d') sont perpendiculaires en A. On note : $(d) \perp (d')$

- Droites parallèles :



Ici les droites (d) et (d') sont parallèles. On note : $(d) \parallel (d')$

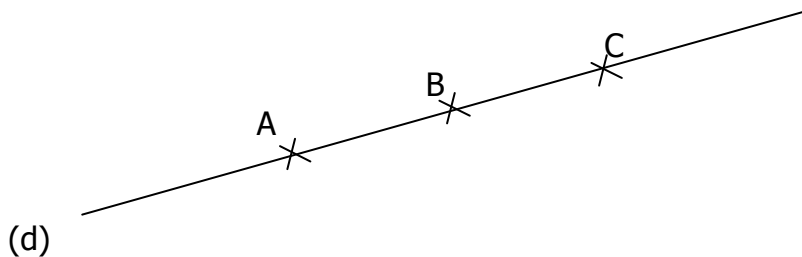
En rouge je vous ai tracé ce qui permet de tracer une parallèle à une droite : on trace la perpendiculaire d'une perpendiculaire à la droite dont on veut tracer une parallèle.

- Les symboles d'appartenance :

Le symbole $\in$ signifie « appartient à »

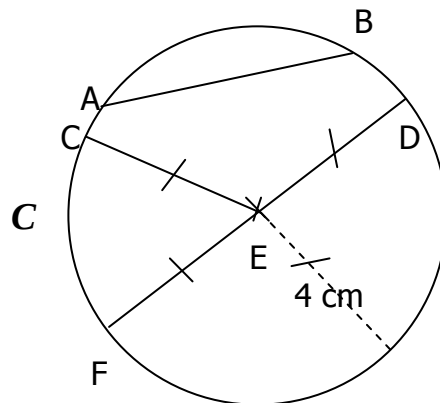
Le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à »

Par exemple :



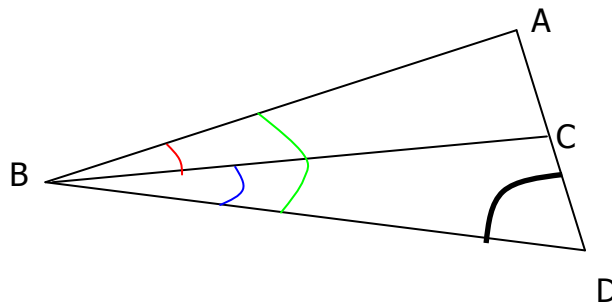
Sur cette figure : $A \in (d)$ $B \in [AC]$ $C \notin [AB]$
 $A \notin [BC]$ $A \in [CB]$ $C \in [AC]$

- Les cercles :



- 1) E est le centre du cercle **C**.
- 2) [CE] est UN rayon de ce cercle.
- 3) FD est LE diamètre de ce cercle. Il vaut 8 cm.
- 4) LE rayon de ce cercle est 4 cm.
- 5) [AB] est une corde de ce cercle.
- 6) [DF] est UN diamètre de ce cercle.
- 7) [ED] est UN autre rayon de ce cercle.
- 8) E est le milieu du diamètre [FD].

- Les angles :



L'angle rouge peut se nommer $\widehat{ABC}$ ou $\widehat{BAC}$.

B est le sommet de cet angle.

[BA) et [BC) sont les deux côtés de l'angle (les demi-droites entre lesquelles on obtient l'angle.)

L'angle vert peut se nommer $\widehat{ABD}$ ou $\widehat{DBA}$.

L'angle bleu peut se nommer $\widehat{CBD}$ ou $\widehat{DBC}$

L'angle noir peut se nommer $\widehat{BDC}$ ou $\widehat{CDB}$ ou $\widehat{BDA}$ ou $\widehat{ADB}$.

On peut aussi le nommer plus simplement $\widehat{D}$ car c'est le seul angle de sommet D possible sur ce dessin.

On rappelle aussi que :

Un angle nul est un angle mesurant 0° (sur le dessin précédent l'angle $\widehat{CAD}$ est un angle nul.

Un angle plat est un angle mesure 180° (sur le dessin précédent l'angle $\widehat{ACD}$ est un angle plat.)

Un angle aigu mesure moins de 90° .

Un angle obtus a une mesure comprise entre 90° et 180° .

Un angle droit mesure 90° .

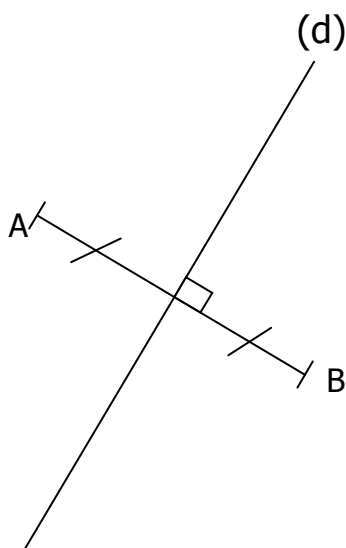
28- DROITES PARTICULIERES EN GEOMETRIE

I. Médiatrices :

Alors les médiatrices sont des droites définies à partir d'un segment. On ne parle donc jamais d'une médiatrice d'une droite hein !

- La médiatrice d'un segment est la droite passant par le milieu de ce segment et perpendiculaire à ce segment.

Exemple :



Sur cette figure, la droite (d) est la médiatrice du segment [AB] : elle lui est perpendiculaire et elle passe par son milieu.

Les médiatrices possèdent une propriété importante :

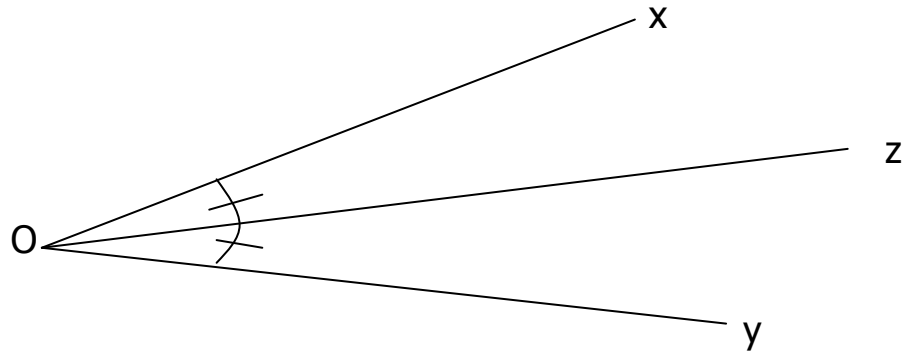
- Tous les points de la médiatrice sont à égale distance des extrémités. Cela permet de repérer (et donc de justifier) qu'une droite est la médiatrice d'un segment : soit on remarque qu'elle passe au milieu du segment et qu'elle fait un angle droit avec ; soit on remarque qu'il y a (au moins) dessus deux points distincts situés à égale distance des extrémités.

II. Bissectrices :

Les bissectrices sont des demi-droites (ou droites, peu importe) qui ne sont définies qu'à partir d'angles.

- La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

Exemple :



Sur cette figure la demi-droite $[Oz)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

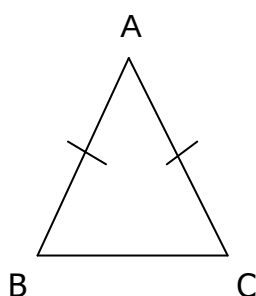
Remarquons que la bissectrice d'un angle passe forcément par le sommet de l'angle.

29- TRIANGLES & POLYGONES

I. Les définitions des triangles :

- Un triangle équilatéral est un triangle ayant des trois côtés égaux.
- Un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés égaux.

Par exemple :



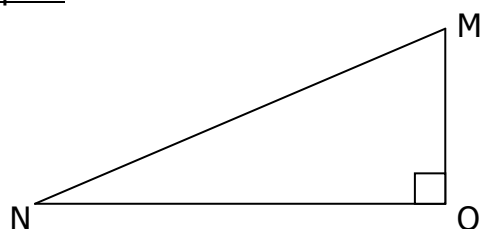
Le triangle ABC ci-dessus est isocèle en A, c'est à dire que ses deux côtés égaux se joignent en A.

A est appelé sommet principal du triangle ABC et [BC] est appelé la base.

Attention : lors d'un exercice, bien lire dans l'énoncé où le triangle est isocèle car sinon gros risque d'erreur !

- Un triangle rectangle est un triangle ayant un angle droit, c'est à dire ayant deux côtés perpendiculaires.

Par exemple :

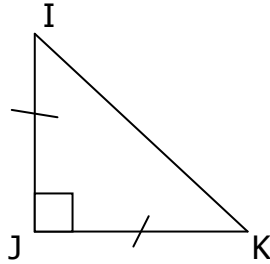


Le triangle MNO ci-dessus est un triangle rectangle en O, c'est à dire que l'angle droit se situe au sommet O.

Attention : comme pour les triangles isocèles, il faut bien lire où le triangle est rectangle dans un énoncé !

- Un triangle isocèle-rectangle est un triangle ayant deux côtés égaux et perpendiculaires.

Par exemple :



Le triangle IJK ci-dessus est isocèle-rectangle en J.

Attention : même remarque que pour les triangles précédents...

II. Quelques mots sur les polygones :

Un polygone est une figure dont le tour est constitué de plusieurs côtés.

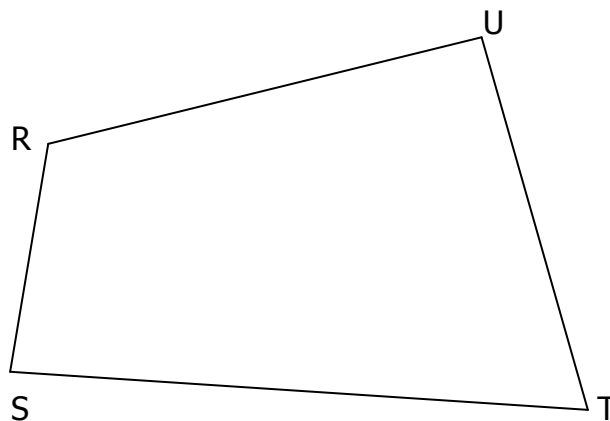
Nous ce qui nous intéresse ce sont principalement les triangles (polygones à 3 côtés) et les quadrilatères (polygones à 4 côtés).

Je rappelle juste que pour nommer un triangle il suffit de balancer les 3 lettres correspondant aux sommets dans l'ordre que vous voulez.

Par exemple, le triangle ABC peut aussi se nommer ACB, BAC, BCA, CAB et CBA.

Pour les quadrilatères, je vais être plus pointilleux sans en faire trop (surtout qu'il y a d'autres parties dans ce cours où vous verrez en détail les parallélogrammes, les quadrilatères les plus importants du programme.)

Alors on va prendre ce quadrilatère quelconque :



Alors on y va pour quelques rappels de base (valables pour tous les polygones.)

- Les points R, S, T et U sont les sommets
- [RU], [UR], [TS] et [SR] sont les côtés

- [RU] et [UT], par exemple, sont des côtés adjacents ou consécutifs (ce sont des côtés qui ont un sommet en commun)
- [RU] et [ST] sont des côtés opposés (ils n'ont aucun sommet en commun) ([RS] et [UT] sont aussi opposés)
- R et T sont des sommets opposés (Ils ne se suivent pas quand on tourne autour du polygone). S et T sont, par contre, des sommets consécutifs (ils se suivent)
- Un segment qui joint un sommet à un sommet opposé est appelé une diagonale. (Ici il y a deux diagonales : [RT] et [SU]. Le triangle n'a pas de diagonales car les sommets se suivent tous. Un polygone ayant plus de 4 côtés a plus de diagonales.)
- On peut aussi parler d'angles opposés et d'angles consécutifs. Ici $\hat{S}$ et $\hat{U}$ sont des angles opposés.
- Pour nommer un polygone (et donc un quadrilatère), on part d'un sommet et on nomme les lettres en tournant autour du polygone dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire.
La quadrilatère précédent peut se nommer par exemple RSTU ou SRUT ou STUR.
Il ne peut par contre se nommer RUST.
Il faut bien respecter cette règle si on vous demande de construire un quadrilatère car sinon vous risquez de ne pas placer les sommets correctement, déjà sur votre dessin à main levée, et toute votre construction sera fausse.

21- PROPRIETES DE BASE EN GEOMETRIE

I. Sur les droites :

Celles-là elles servent souvent et elles sont simples à retenir, alors on les zappe pas.

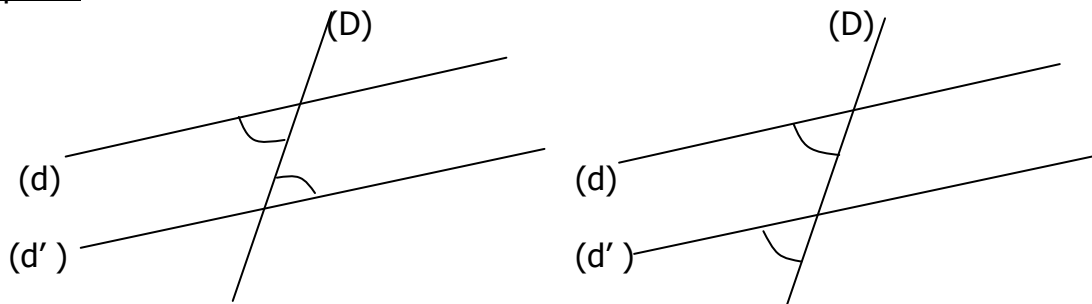
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

II. Sur les angles :

- La somme des angles d'un triangle est de 180° .
- Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme de leur mesure est 90° .
- Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme de leur mesure est 180° .
- Si deux angles alternes-internes (ou correspondants) par rapport à deux droites ont la même mesure, alors ces droites sont parallèles.
- Deux angles alternes-internes (ou correspondants) par rapport à deux droites parallèles ont la même mesure.
- Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.

Rappels :

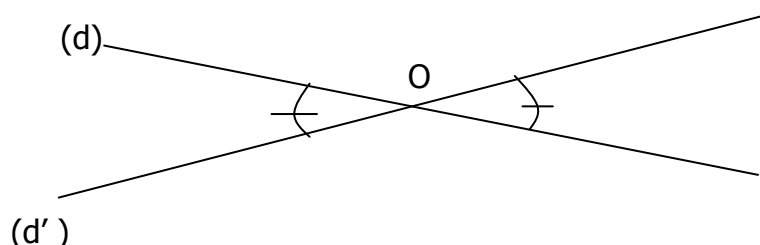
*



Sur la figure de gauche les angles marqués sont alternes-internes par rapport aux droites (d) et (d') et à la sécante (D).

Sur la figure de droite les angles marqués sont correspondants par rapport aux droites (d) et (d') et à la sécante (D).

*



Sur cette figure les deux angles marqués sont opposés par le sommet O. (Et ils ont donc la même mesure...)

III. Sur les triangles :

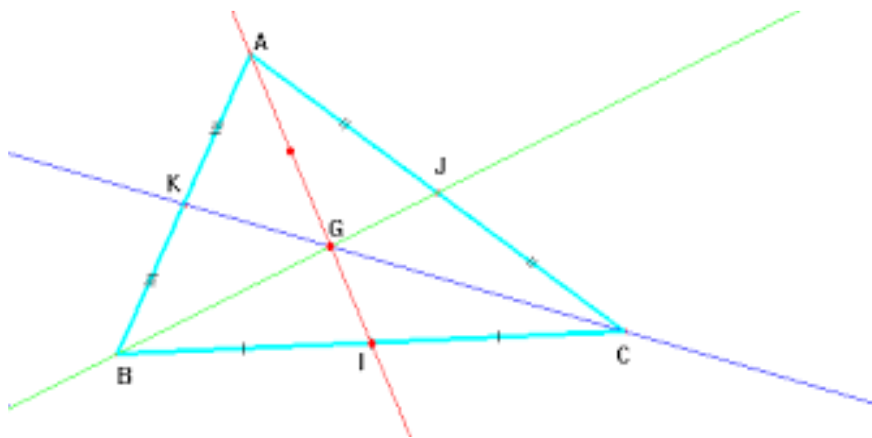
En plus des définitions des différents triangles que vous devez connaître, voici quelques propriétés à savoir aussi :

- Si un triangle a deux angles égaux, alors c'est un triangle isocèle.
- Si un triangle a trois angles égaux alors c'est un triangle équilatéral.
- Si un triangle est rectangle, alors ses deux angles aigus sont complémentaires.
- Si un triangle a deux angles complémentaires, alors c'est un triangle rectangle.
- Si un triangle est isocèle, alors la médiane issue du sommet principal est aussi médiatrice, médiane et bissectrice.
- Si un triangle est équilatéral, alors chaque médiane est aussi une médiatrice, une hauteur et une bissectrice du triangle.
- Dans un triangle chaque côté a une longueur inférieure à la somme des deux autres longueurs.

- Le point d'intersection des médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle (le cercle passant par les trois sommets en même temps.)
- Le point d'intersection des bissectrices d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans le cercle (le cercle touchant les trois côtés en un seul point.)
- Le point d'intersection des médianes d'un triangle est le centre de gravité du triangle.
- Le point d'intersection des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre.

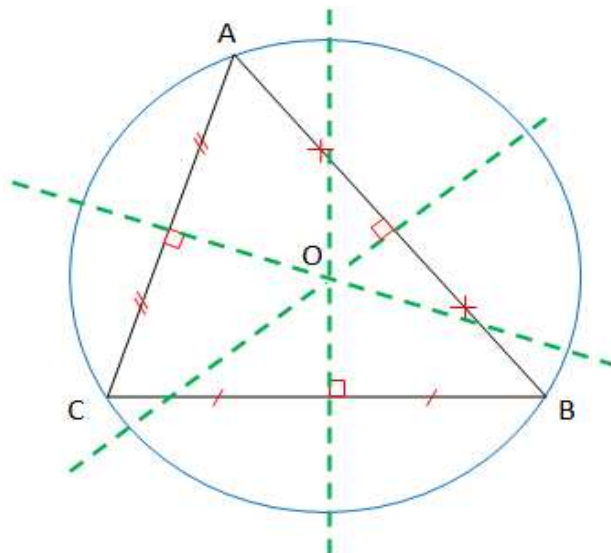
Rappels :

*



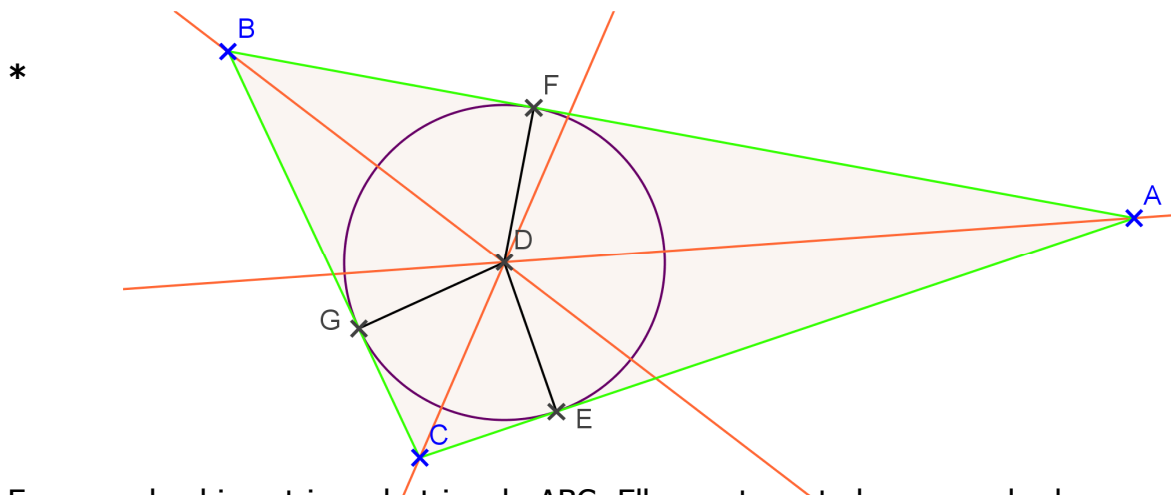
Les médianes (AI), (BJ) et (CK) du triangle ABC. I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. G est donc le centre de gravité du triangle.

*



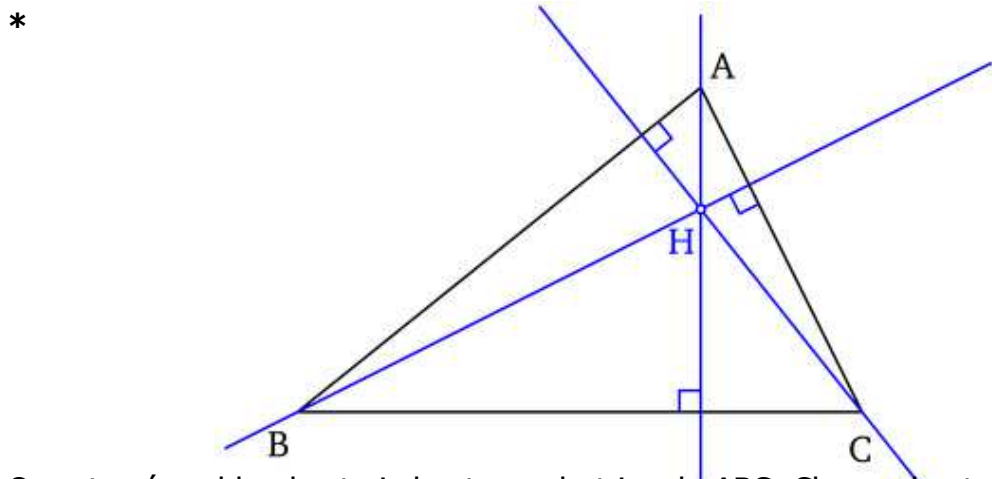
Les médiatrices sont tracés en pointillés ici. Elles sont perpendiculaires à chaque côté et passent par les milieux de ces côtés. Le point O est le centre du cercle circonscrit (en bleu).

(Pour le tracer il faut tracer le cercle de centre O et passant par A, B ou C...)



En rouge les bissectrices du triangle ABC. Elles partagent chaque angle de sommets A, B et C en deux angles de même mesure. Leur point d'intersection est le point D, qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

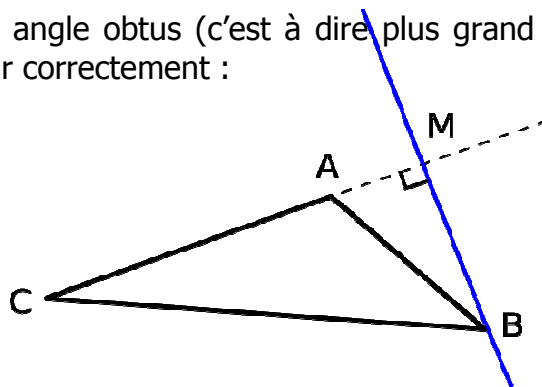
(Pour le tracer, il faut tracer un segment perpendiculaire à un côté d'extrémité le centre, par exemple [FD] avec $(FD) \perp (AB)$, et tracer le cercle de centre D et de rayon DF.)



On a tracé en bleu les trois hauteurs du triangle ABC. Chaque hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé à son sommet. Leur point d'intersection H est l'orthocentre du triangle.

Attention !

Si vous avez un triangle ayant un angle obtus (c'est à dire plus grand qu'un angle droit) il faut savoir tracer la hauteur correctement :

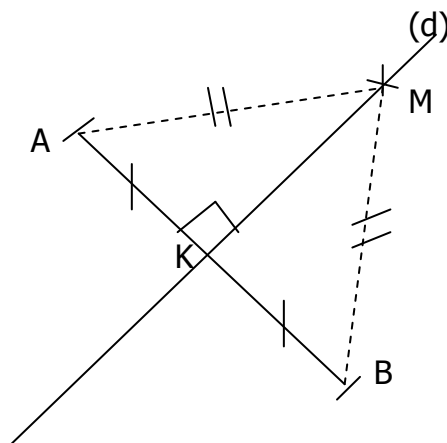


Ici la hauteur issue de B (celle qui part du sommet B) est en bleu, et on a prolongé (AC) pour la tracer correctement... car ici la hauteur est à « l'extérieur » du triangle ABC...

IV. Sur les médiatrices :

- Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par son milieu, alors c'est la médiatrice de ce segment.
- (Réciproque de la précédente) Si une droite est la médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire et passe par son milieu.
- Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
- (Réciproque de la précédente) Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.
- Si une droite passe par deux points équidistants d'un segment, alors c'est la médiatrice de ce segment.
- Si une droite passe par un point équidistant des extrémités d'un segment, et est perpendiculaire à ce segment, alors c'est la médiatrice de ce segment.

Rappel :



Ici (d) est la médiatrice du segment $[AB]$, donc K est le milieu de $[AB]$, $(d) \perp [AB]$ et le point M, qui appartient à (d) est équidistant de A et de B : $MA = MB$.

PROPRIETES DES QUADRILATERES PARTICULIERS

I. Les définitions de base :

On rappelle que dans la famille des polygones on a les quadrilatères, les triangles, etc.

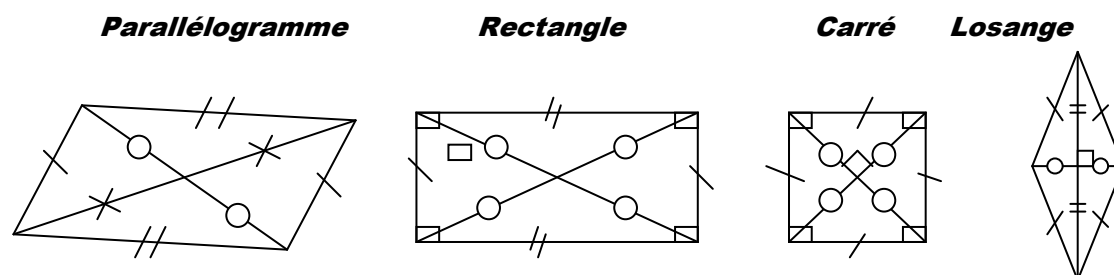
Dans la famille des quadrilatères il y a les parallélogrammes.

Dans la famille des parallélogrammes il y a les rectangles, les losanges et les carrés.

On rappelle enfin qu'un carré n'est rien d'autre qu'un rectangle et un losange à la fois !

- Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux.
- Un rectangle est un quadrilatère ayant (au moins) trois angles droits.
(S'il a 3 angles droits il en a alors forcément 4...)
- Un losange est un quadrilatère ayant ses quatre côtés égaux.
- Un carré est un quadrilatère ayant ses côtés égaux et 4 (au moins 3 donc) angles droits.

Il est plus facile de retenir ces définitions et les propriétés de ces quadrilatères en mémorisant ces quatre figures à main levée codant les différentes informations :



On va voir toutes les propriétés concernant ces quadrilatères en détail. Elles sont de deux sortes et il ne faut pas les confondre lorsque vous les utiliserez pour des démonstrations...

II. Utiliser un résultat relatif à un quadrilatère donné :

Ces propriétés permettent d'obtenir des résultats utiles pour répondre à une question posée à partir du moment où on sait déjà qu'on a un parallélogramme, un rectangle, etc.

A partir d'un parallélogramme :

- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles et égaux deux à deux.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure.

A partir d'un losange :

- Si un quadrilatère est un losange alors c'est un parallélogramme (*donc on peut en déduire des résultats avec les propriétés précédentes.*)
- Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
- Si un quadrilatère est un losange alors ses côtés sont tous égaux.

A partir d'un rectangle :

- Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un rectangle alors il a quatre angles droits.
- Si un quadrilatère est un rectangle alors il a ses diagonales de même longueur et de même milieu.

A partir d'un carré :

- Si un quadrilatère est un carré alors c'est un losange et un carré, donc un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un carré alors ses quatre côtés sont égaux et perpendiculaires deux à deux.
- Si un quadrilatère est un carré alors ses diagonales sont perpendiculaires, ont la même longueur et le même milieu.

III. Démontrer qu'un quadrilatère donné est un quadrilatère particulier :

Ces propriétés permettent de déduire à partir des informations données qu'un quadrilatère sera en fait un quadrilatère particulier.

On peut toujours essayer de voir si on ne peut pas montrer qu'on a déjà un parallélogramme car les rectangles, losanges et carrés sont des parallélogrammes, puis ensuite regarder si on a d'autres informations qui permettent d'affiner notre réponse.

Pour montrer qu'on a un parallélogramme :

- Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux (ou égaux deux à deux) alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses angles opposés égaux deux à deux alors c'est un parallélogramme.

Pour montrer qu'un parallélogramme est un rectangle :

- Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a ses diagonales de même mesure alors c'est un rectangle.

Pour montrer qu'un parallélogramme est un losange :

- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs (adjacents) égaux alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

Pour montrer qu'un parallélogramme est un carré :

- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux et perpendiculaires alors c'est un carré.
- Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur et perpendiculaires alors c'est un carré.
- Si un parallélogramme est un rectangle et un losange alors c'est un carré.

Pour montrer qu'un quadrilatère est un rectangle (sans savoir que c'est un parallélogramme !) :

- Si un quadrilatère a quatre angles droits (**au moins trois angles droits**) alors c'est un rectangle.
- Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur et de même milieu alors c'est un rectangle.

Pour montrer qu'un quadrilatère est un losange (sans savoir que c'est un parallélogramme !) :

- Si un quadrilatère a ses quatre côtés égaux alors c'est un losange.
- Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu alors c'est un losange.

Pour montrer qu'un quadrilatère est un carré (sans savoir que c'est un parallélogramme !) :

- Si un quadrilatère a ses quatre côtés égaux et ses quatre angles droits alors c'est un carré.
- Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, de même milieu et de même longueur alors c'est un carré.

LE THEOREME DE PYTHAGORE & SA RECRIPROQUE

C'est THE théorème de la géométrie ! Celui qui tombe dans presque tout exercice digne de ce nom ! Celui qui fait tomber aussi les élèves qui le connaissent mal...

C'est celui qui permet de déterminer une longueur manquante dans un triangle rectangle si on connaît les deux autres... Mais pas seulement. Indirectement il permet aussi de savoir si un triangle est rectangle ou non si on connaît la longueur de ses trois côtés...

Bref, c'est quelque chose que vous devez savoir utiliser et dont vous devez maîtriser la rédaction (qui est bien souvent hasardeuse...)

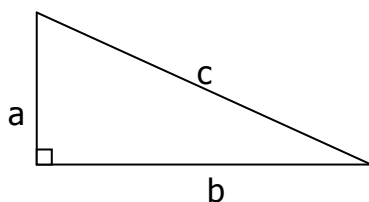
I. Le théorème de Pythagore :

Le théorème de Pythagore :

- Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

On rappelle que l'hypoténuse est le plus grand côté du triangle rectangle et qu'il s'agit aussi du côté opposé à l'angle droit dans ce triangle.

On retient plus simplement le théorème avec ceci :

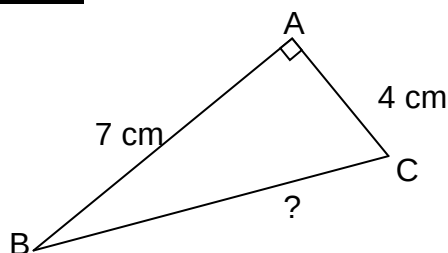


Dans ce triangle rectangle on a :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Le théorème de Pythagore permet de trouver une longueur manquante dans un triangle rectangle si on connaît les deux autres

Exemple 1 :



Déterminer BC :

On sait que le triangle ABC est rectangle en A.

Donc par le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 7^2 + 4^2$$

$$BC^2 = 49 + 16$$

$$BC^2 = 65$$

$$\text{d'où } BC = \sqrt{65}$$

$$\text{d'où } \underline{BC \approx 8,1 \text{ (cm)}}$$

On regarde bien comment on rédige : on commence par dire dans quel triangle on travaille (il peut y en avoir plusieurs sur une construction) et on n'oublie pas de dire qu'il est rectangle et où ! On n'oublie pas non plus de citer le théorème de Pythagore et on essaie de l'écrire sans faute non mais ho !

Remarque : un mot sur la racine carrée $\sqrt{}$.

La racine carrée est la fonction inverse du carré.

C'est à dire que si on connaît le carré d'un nombre, la racine carrée nous donne ce nombre.

Par exemple : $7^2 = 49$ donc $\sqrt{49} = 7$

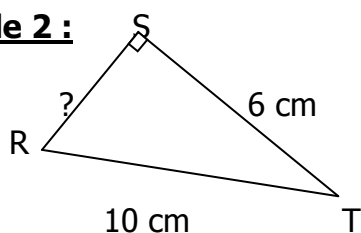
La plupart du temps la racine carrée d'un nombre n'a pas d'écriture décimale exacte (comme $\sqrt{65}$ dans l'exemple ci-dessus), donc on sera obligé d'arrondir la réponse.

Alors on fait attention et on ne mélange pas les carrés et les racines carrés !

On n'écrit pas par exemple (dans l'exemple ci-dessus) : $BC^2 = \sqrt{65} ! !$

Note historique pour que vous dormiez moins bête : le symbole de la racine carrée correspond en fait au R majuscule utilisée avant en français. R comme... racine carrée...

Exemple 2 :



Déterminer RS :

On sait que le triangle RST est rectangle en S.

Donc par le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}RT^2 &= RS^2 + ST^2 \\10^2 &= RS^2 + 6^2 \\100 &= RS^2 + 36\end{aligned}$$

Petite pause :

d'abord on voit que la longueur qui est seule à gauche dans la formule est RT et pas RS ! Ce n'est pas parce qu'on cherche RS qu'on doit le faire : c'est TOUJOURS L'HYPOTENUSE qui est tout seul à gauche dans la formule de Pythagore ! !

Ensuite on arrive à $100 = RS^2 + 36$

On est pas dans la situation de l'exemple 1 car ce qu'on cherche n'est « tout seul à gauche ». Alors on ne stresse pas et on retient ça : dans cette situation, il suffit de faire la soustraction entre le plus grand nombre et le plus petit. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}RS^2 &= 100 - 36 \\RS^2 &= 64 \\d'où \quad RS &= \sqrt{64} \\d'où \quad \underline{RS} &= \underline{8 \text{ (cm) }}\end{aligned}$$

(Ici on a une valeur exacte et on a pu le trouver sans calculatrice car, normalement, tout le monde sait que 8^2 (c'est à dire 8×8) est égal à 64...)

II. La réciproque du théorème de Pythagore :

La partie qui suit (jusqu'à ma prochaine remarque en rouge vif !) n'est pas forcément utile mais elle est intéressante si vous voulez comprendre le principe de réciproque et de « contraposée »...

Réciproques et contraposées d'une propriété :

* Une propriété ou un théorème peut toujours s'énoncer sous la forme :

" Si **hypothèse(s)** alors **conclusion(s)**"

* La contraposée d'une propriété est obtenue en inversant hypothèses et conclusions et en prenant le sens contraire des hypothèses et conclusions de départ.

Par exemple,

si on prend la propriété :

"Si un nombre est positif alors il est supérieur à -2"

alors la contraposée de cette propriété est :

"Si un nombre est inférieur à -2 alors il est négatif"

* Si une propriété est vraie alors la contraposée de cette propriété est vraie aussi.

Par exemple,

la propriété donnée ci-dessus est vraie et sa contraposée est vraie aussi.

* La réciproque d'une propriété est obtenue en inversant hypothèses et conclusions.

Par exemple,

si on reprend la propriété :

"Si un nombre est positif alors il est supérieur à -2"

alors la réciproque de cette propriété est :
"Si un nombre est supérieur à -2 alors il est positif"

* Attention, si une propriété est vraie alors sa réciproque n'est pas forcément vraie !

Par exemple,

la réciproque obtenue ci-dessus *"Si un nombre est supérieur à -2 alors il est positif"* est fausse !

* Le théorème de Pythagore peut se "simplifier" en l'énonçant ainsi :

"Si un triangle est rectangle alors on a l'égalité de la formule"

Sa contraposée revient donc à dire :

"Si on n'a pas l'égalité de la formule alors le triangle n'est pas rectangle"

Cette propriété est vraie et servira à montrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

La réciproque du théorème de Pythagore peut s'énoncer :

"Si on a l'égalité alors le triangle est rectangle"

La réciproque du théorème de Pythagore est vraie et servira à montrer qu'un triangle est rectangle.

(Voilà, vous pouvez reprendre la lecture ici si vous voulez...)

Réciproque du théorème de Pythagore :

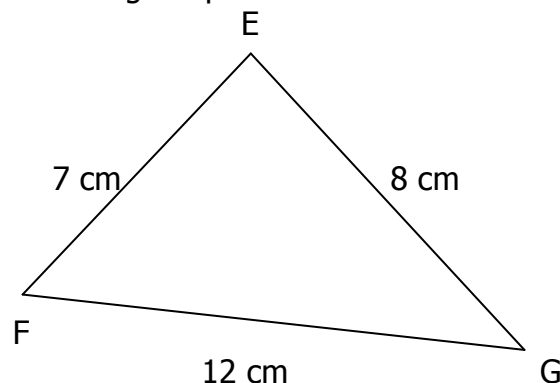
- Si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle, et son angle droit est situé au sommet opposé au plus grand côté.

Que vous deviez démontrer qu'un triangle est rectangle ou non à partir de ses côtés, la rédaction sera la même au début. Ce qui est normal car au départ on ne sait pas s'il sera rectangle ou pas.

Seule la conclusion change puisque dans un cas on conclue avec la réciproque et dans l'autre avec la contraposée.

Exemple 1 :

On considère ce triangle représenté à main levée:



Le triangle EFG est-il rectangle ?

On sait que dans le triangle EFG le plus grand côté est [FG].

On a : $FG^2 = 12^2 = 144$
et $EF^2 + EG^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$

Donc : $FG^2 \neq EG^2 + EF^2$

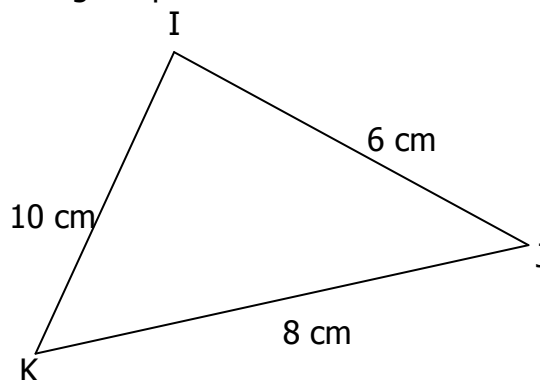
Donc par la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle EFG n'est pas rectangle.

*On remarque qu'on ne parle pas d'hypoténuse car, au départ, on ne sait pas si le triangle est rectangle et l'hypoténuse n'existe que dans les triangles rectangles !
On précise donc dans quel triangle on bosse et quel est le plus grand côté.*

*On remarque aussi qu'on n'écrit pas : $FG^2 = EF^2 + EG^2$ dans les calculs, grosse erreur commise par beaucoup d'élèves, car on ne sait pas s'il y aura égalité ou pas !
On doit donc faire deux calculs séparément ! ! !*

Exemple 2 :

On considère ce triangle représenté à main levée:



Le triangle IJK est-il rectangle ?

On sait que dans le triangle IJK le plus grand côté est [KI].

On a : $KI^2 = 10^2 = 100$
et $IJ^2 + JK^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Donc : $KI^2 = IJ^2 + JK^2$

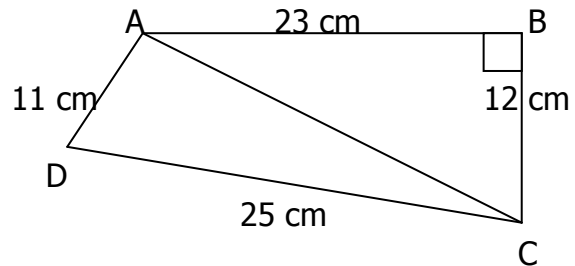
Donc par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en J.

*On remarque qu'en plus de conclure qu'il est rectangle on précise aussi où il l'est...
Parce qu'on est des gens bien élevés hein !*

III. Quelques exercices :

Exercice 1 :

On considère la figure suivante :



Le but de cet exercice est de déterminer si le triangle ACD est rectangle.

1) Déterminer la longueur AC :

On sait que ABC est un triangle rectangle en B.

Donc par le théorème de Pythagore on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 23^2 + 12^2$$

$$AC^2 = 529 + 144$$

$$AC^2 = 673$$

$$\text{d'où } AC = \sqrt{673}$$

$$\text{d'où } \underline{AC \approx 25,9 \text{ cm}}$$

2) Déterminer alors si le triangle ADC est rectangle :

On sait que dans le triangle ACD, [AC] est le plus grand côté.

$$\text{On a : } AC^2 = 673$$

$$\text{et } AD^2 + DC^2 = 11^2 + 25^2 = 121 + 625 = 746$$

Donc :

$$AC^2 \neq AD^2 + DC^2$$

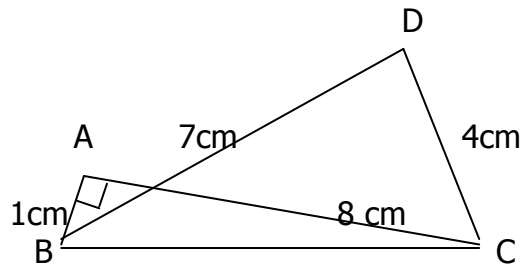
Donc par la contraposée du théorème de Pythagore (ou « comme conséquence du théorème de Pythagore ») le triangle ACD n'est pas rectangle.

Remarquez que nous avons pris $AC^2 = 673$ (obtenu à la question précédente) et pas $AC^2 \approx 25,9^2 \approx 670,81$

Quand on veut vérifier qu'un triangle est rectangle ou non il faut travailler avec des valeurs exactes car sinon on risque de conclure faussement qu'il y a égalité ou non alors que ce n'est pas le cas. Pensez-y...

Exercice 2 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 1 \text{ cm}$ et $AC = 8 \text{ cm}$.
BCD est un triangle tel que $BD = 7 \text{ cm}$ et $DC = 4 \text{ cm}$.



1) Calculer BC.

On sait que le triangle ABC est rectangle en A, donc par le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 1^2 + 8^2 \\ &= 1 + 64 \\ &= 65 \end{aligned}$$

d'où $BC = \sqrt{65} \approx 8,06 \text{ (cm)}$

2) Démontrer que le triangle BDC est rectangle en D.

Dans le triangle BDC, [BC] est le plus grand côté.

On a : $BC^2 = 65$

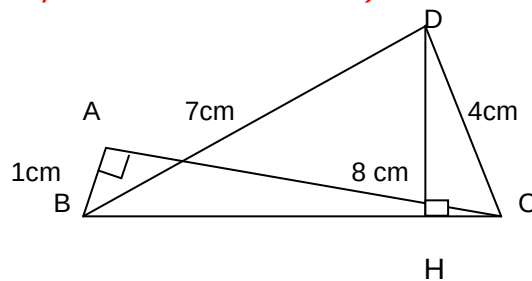
Et $BD^2 + DC^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$

Donc on a : $BC^2 = BD^2 + DC^2$

Donc par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BDC est rectangle en D.

3) On trace la hauteur issue de D du triangle BDC. Elle coupe (BC) en H. Calculer DH.

(Voici le dessin complété avec la hauteur...)



On sait que : $\text{aire BDC} = \frac{BD \times DC}{2} = \frac{7 \times 4}{2} = 14 \text{ (cm}^2\text{)}$

On sait aussi que $\text{aire BDC} = \frac{DH \times BC}{2} = \frac{DH \times \sqrt{65}}{2} \approx DH \times 4,03 \text{ (cm}^2\text{)}$

D'où $DH \times 4,03 \approx 14$

$$\begin{aligned} \text{d'où } DH &\approx \frac{14}{4,03} \\ &\approx \underline{3,5 \text{ (cm)}} \end{aligned}$$

Alors pour ceux qui n'ont pas compris ce qu'on a fait ici, on a déterminé l'aire du triangle BDC de deux façons car pour calculer l'aire d'un triangle la formule est :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Comme dans un triangle rectangle les deux côtés perpendiculaires sont à la fois base et hauteur correspondante, on a pu calculer l'aire directement avec les côtés [BD] et [DC].

Comme l'autre formule utilise la hauteur [DH] avec la longueur DH qu'on cherche, cela nous donne une toute petite équation à résoudre, ce qu'on a fait.

Retenez que dans un exercice avec un triangle rectangle on vous demande de trouver la longueur d'une hauteur, il faut souvent passer par l'aire et la calculer de deux façons différentes...

Exercice 3 :

Deux robots Phoebos et Deimos explorent le plateau de la planète Mars. Ils partent en même temps de leur base. Phoebos se dirige vers le Nord à la vitesse de 20 km/h, et Deimos se dirige vers l'est à la vitesse de 48 km/h.

- 1) A quelle distance de leur base se trouvent Phoebos et Deimos au bout de deux heures ?

(Revoir la partie sur les histoires de vitesse, distance et durée au cas où...)

On sait que $d = v \times t$

Donc pour Phoebos : $d_1 = v_1 \times t = 20 \times 2 = 40 \text{ (km)}$

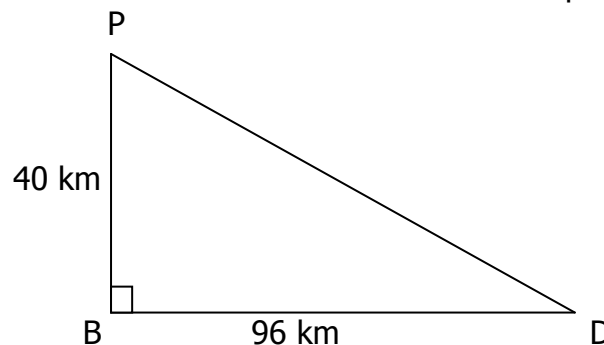
Phoebos est à 40 km de la base.

Et pour Deimos : $d_2 = v_2 \times t = 48 \times 2 = 96 \text{ (km)}$

Deimos est à 96 km de la base.

- 2) Quelle distance les sépare au bout de deux heures ? (Faire un petit dessin pour vous aider...)

Suivons l'énoncé et faisons un petit dessin, sachant que quand on va vers le nord et qu'une autre personne va vers l'est on suit deux directions perpendiculaires...



(Il s'agit ici d'un exercice « concret » donc c'est à vous de faire un dessin et de nommer les points que vous utiliserez dans votre rédaction, et que le correcteur doit voir...)

On sait que le triangle PBD est rectangle en B.

Donc par le théorème de Pythagore on a :

$$DP^2 = PB^2 + BD^2$$

$$DP^2 = 40^2 + 96^2$$

$$DP^2 = 1600 + 9216$$

$$DP^2 = 10\,816$$

$$\text{d'où } DP = \sqrt{10816}$$

$$\text{d'où } DP = 104 \text{ (km)}$$

Donc les deux robots sont alors distants de 104 km.

Pour votre culture, sachez que Phobos et Deimos sont les noms donnés aux deux minuscules lunes de la planète Mars...

Remarque :

Pensez à utiliser du Pythagore (le théorème ou sa réciproque) dès que vous avez des constructions faisant intervenir certaines figures comme par exemple :

- Un rectangle ou un carré
- Un losange (car ses diagonales sont perpendiculaires)

Et dès que vous avez un angle droit et deux longueurs et qu'on vous demande d'en trouver une nouvelle, pensez à voir si un triangle rectangle n'apparaît pas sous vos yeux...

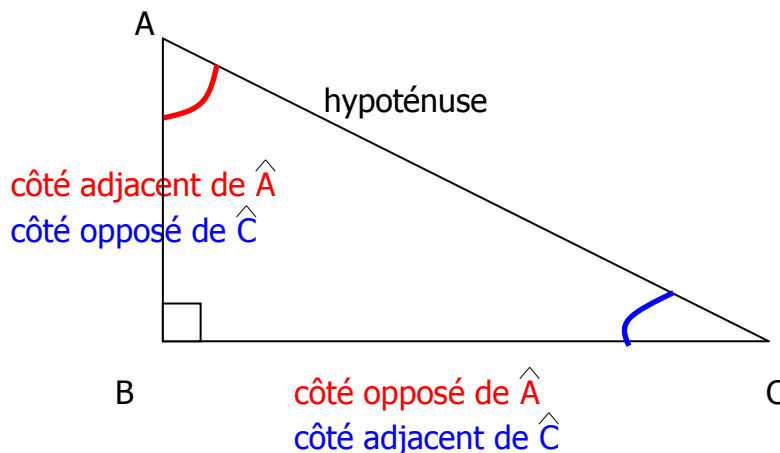
Et si on vous demande de voir s'il n'y pas un angle droit quelque part pensez à la réciproque de Pythagore si vous connaissez les longueurs en rapport avec cet angle droit...

33- TRIGONOMETRIE

Comme avec Pythagore, nous avons ici des formules qui s'utilisent dans des triangles rectangles et qui permettent, entre autres, de déterminer des longueurs manquantes dans un tel triangle. La différence avec Pythagore c'est qu'ici ce sont les angles qui vont nous permettre de les déterminer.

Les formules que nous allons utiliser sont appelées les formules trigonométriques. Elles permettront aussi de déterminer la mesure d'un angle en connaissant deux longueurs d'un triangle rectangle.

I. Quelques définitions à connaître :



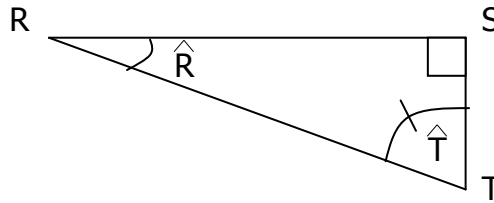
- Dans le triangle ABC rectangle en B ci-dessus, il y a deux angles aigus : $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$. (On peut aussi les noter, dans ce cas précis, $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.)
- Dans ce triangle, le plus grand côté est appelé hypoténuse. Ici il s'agit de [AC]. (Il est aussi opposé à l'angle droit.)
- Les deux angles aigus sont définis chacun par deux côtés. On rappelle que ces deux angles aigus sont complémentaires (leur somme est égale à 90° .)
- Pour l'angle $\widehat{BAC}$, ces deux côtés sont [AB] et [AC]. [AC] étant l'hypoténuse l'autre côté [AB] est appelé côté adjacent de l'angle. Le côté [BC] ne « touche » pas l'angle $\widehat{BAC}$. On l'appelle côté opposé de l'angle $\widehat{BAC}$.

- Pour l'angle $\widehat{ACB}$, ces deux côtés sont [AC] et [BC].
[AC] étant l'hypoténuse l'autre côté [BC] est appelé côté adjacent de l'angle.
Le côté [AB] ne « touche » pas l'angle $\widehat{ACB}$. On l'appelle côté opposé de l'angle $\widehat{ACB}$

Remarque :

Dans un triangle rectangle, le côté opposé d'un angle aigu est le côté adjacent de l'autre et vice versa.

Exemple :



Dans le triangle RST rectangle en S :

L'hypoténuse est [RT].

Le côté opposé de l'angle $\widehat{R}$ est [ST]. Son côté adjacent est [RS].

Le côté opposé de l'angle $\widehat{T}$ est [RS]. Son côté adjacent est [ST].

II. Les formules trigonométriques dans le triangle rectangle :

Dans un triangle rectangle, si $\widehat{a}$ est un des deux angles aigus :

- On appelle cosinus de $\widehat{a}$ et on note $\cos(\widehat{a})$:

$$\cos(\widehat{a}) = \frac{\text{côté adjacent de } \widehat{a}}{\text{hypoténuse}}$$

- On appelle sinus de $\widehat{a}$ et on note $\sin(\widehat{a})$:

$$\sin(\widehat{a}) = \frac{\text{côté opposé de } \widehat{a}}{\text{hypoténuse}}$$

- On appelle tangente de $\widehat{a}$ et on note $\tan(\widehat{a})$:

$$\tan(\widehat{a}) = \frac{\text{côté opposé de } \widehat{a}}{\text{côté adjacent de } \widehat{a}}$$

Remarque :

Il existe un moyen mnémotechnique et phonétique de se rappeler de ces trois formules. Il suffit de retenir phonétiquement **SOHCAHTOA** en se rappelant qu'il y a trois lettres par « syllabes ».

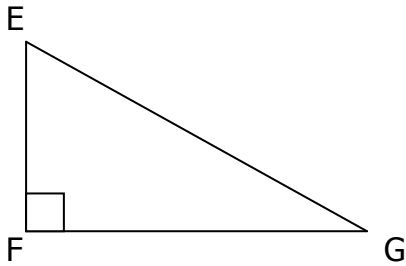
Si vous retenir que SOH s'écrit donc S O H vous retiendrez que :

Sinus = Opposé sur Adjacent...

C A H : Cosinus = Adjacent sur Opposé

T O A : Tangente = Opposé sur Adjacent

Exemple :



Dans le triangle EFG rectangle en F on a :

$$\cos(\widehat{FEG}) = \frac{EF}{EG} \quad \sin(\widehat{FEG}) = \frac{FG}{EG} \quad \tan(\widehat{FEG}) = \frac{FG}{EF}$$

$$\cos(\widehat{EGF}) = \frac{FG}{EG} \quad \sin(\widehat{EGF}) = \frac{EF}{EG} \quad \tan(\widehat{EGF}) = \frac{EF}{FG}$$

Remarque 1 :

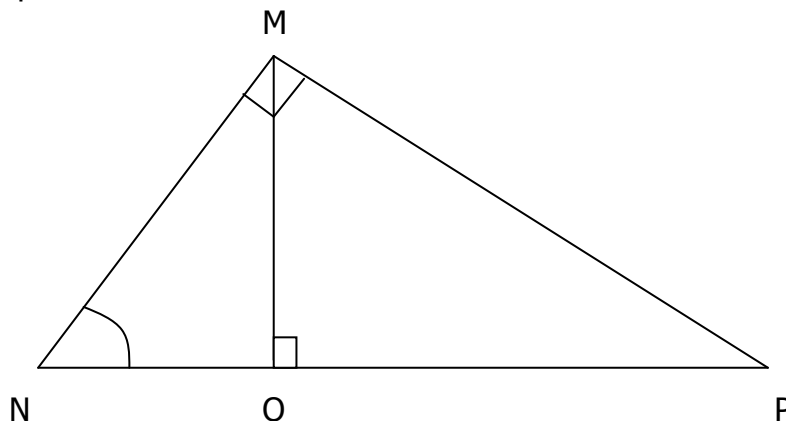
Avec l'exemple ci-dessus, on constate que le cosinus du premier angle aigu est égal au sinus de l'autre angle aigu et inversement.

On remarque aussi que les tangentes des deux angles aigus sont inverses l'une de l'autre.

Remarque 2 :

Dans certains cas, il se peut qu'on puisse définir le cosinus d'un angle de plusieurs façons différentes si on remarque qu'il s'agit d'un angle aigu de plusieurs triangles rectangles en même temps. (Pareil pour le sinus et la tangente.)

Par exemple :



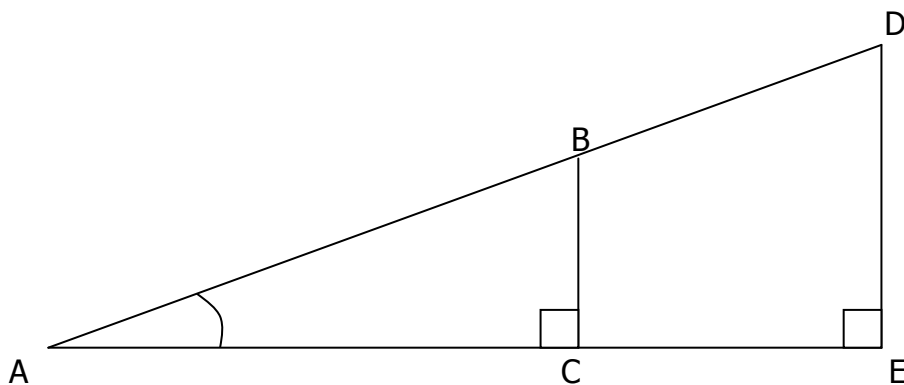
Sur cette figure où on a tracé la hauteur [MO] d'un triangle MNP rectangle en M, on remarque que l'angle $\widehat{MNO}$ (celui qui est dessiné...) est un angle aigu du triangle MNO et du triangle MNP, qui sont tous les deux des triangles rectangles.

Donc dans le triangle MNP rectangle en P on a : $\cos (\widehat{MNO}) = \frac{MN}{NP}$

et dans le triangle MNO rectangle en O on a : $\cos (\widehat{MNO}) = \frac{NO}{MN}$

III. Lien entre cosinus, sinus, tangente et la mesure des angles :

On considère cette figure où les triangles ABC et ADE sont rectangles mais aussi proportionnels (Le triangle ADE est un agrandissement du triangle ABC.)



Dans le triangle ABC rectangle en C on a : $\cos (\widehat{BAC}) = \frac{AC}{AB}$

Dans le triangle ADE rectangle en E on a : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AE}{AD}$

Les deux fractions obtenues sont égales car les longueurs des deux triangles sont proportionnelles, donc les deux cosinus obtenus sont égaux et ne dépendent donc pas des longueurs directement, mais dépendent uniquement de la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$.

Donc dans n'importe quel triangle rectangle, si vous avez un angle de 30° , par exemple, le cosinus que vous trouverez sera toujours le même que pour un autre triangle rectangle ayant un angle de 30° . De même que pour le sinus et la tangente.

Donc à chaque angle (aigu ou non, même si nos formules précédentes ne s'utilisent que dans des triangles rectangles) correspond un cosinus, un sinus et une tangente.

- **La calculatrice permet de calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle.**

Il suffit d'utiliser les touches $\boxed{\cos}$, $\boxed{\sin}$ ou $\boxed{\tan}$

Attention, il faut vérifier que la calculatrice est bien réglée en degrés et non pas en grades ou radians.

Avec une calculatrice on peut compléter le tableau suivant :

$\hat{a}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\cos(\hat{a})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	0,5	0	-1
$\sin(\hat{a})$	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	1	0
$\tan(\hat{a})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$	1	$\sqrt{3} \approx 1,73$	N'EXISTE PAS !	0

Certaines calculatrices (si elles sont bien réglées) peuvent donner les valeurs exactes de certains cosinus, sinus ou tangente. D'où ces nombres en fractions avec des racines carrées dans le tableau ci-dessus.

On remarque aussi que $\tan(90^\circ)$ n'existe pas !!!

Remarques :

Les formules trigonométriques données précédemment ne s'utilisent que dans des triangles rectangles et donc uniquement pour des angles aigus.

Par contre le cosinus, le sinus et la tangente existent pour tous les angles (sauf pour quelques valeurs avec la tangente.)

D'ailleurs dans le tableau vous avez pu compléter une colonne avec un angle de 180°.

A la fin de ce chapitre vous verrez à quoi correspondent réellement le cosinus, le sinus et la tangente de n'importe quel angle.

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse étant toujours plus grand que n'importe lequel des deux autres côtés, on aura toujours à cause des formules pour n'importe quel angle aigu :

$$0 < \cosinus < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \sinus < 1$$

Par contre la tangente d'un angle aigu est positive mais peut être aussi grande qu'on veut. Par exemple à la calculatrice on a : $\tan(89,999^\circ) \approx 57\,295,8$

- **La calculatrice permet aussi de retrouver la valeur d'un angle si on connaît son sinus, son cosinus ou sa tangente :**

Pour cela il suffit d'utiliser les fonctions situées « au-dessus » des touches précédentes.

A la calculatrice il faut d'abord appuyer sur « shift » ou « seconde » pour y avoir accès.

Elles sont généralement notées $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$ (elles sont parfois notées ACS ou ACOS ou ARCCOS etc..)

En utilisant une calculatrice on peut compléter ces tableaux :

$\cos(\hat{a})$	0,1	0,33	0,658	0,8
$\hat{a}$	$\approx 84,3^\circ$	$\approx 70,7^\circ$	$\approx 48,9^\circ$	$\approx 36,9^\circ$

$\sin(\hat{a})$	0,25	0,4	0,79	0,987
$\hat{a}$	$\approx 14,5^\circ$	$\approx 23,6^\circ$	$\approx 52,2^\circ$	$\approx 80,8^\circ$

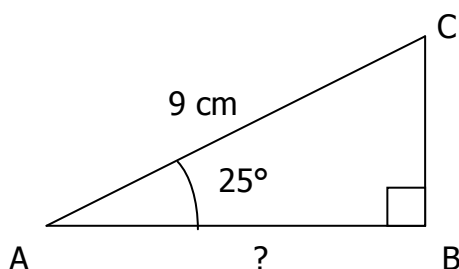
$\tan(\hat{a})$	0,1	0,4	1	1,2
$\hat{a}$	$\approx 5,7^\circ$	$\approx 21,8^\circ$	45°	$\approx 50,2^\circ$

IV. Utilisation des formules trigonométriques pour retrouver une longueur dans un triangle rectangle :

Alors là on va se servir du fait que la calculatrice connaît la valeur de n'importe quel cosinus, sinus ou tangente si on connaît la mesure de l'angle.

Pour déterminer une longueur manquante dans un triangle rectangle avec les formules trigonométriques, il suffit de connaître un angle et une longueur.

Exemple 1 :



Déterminer AB :

La méthode est toujours la même : il faut trouver quelle formule relie ensemble l'angle que vous connaissez, le côté que vous connaissez et la longueur que vous cherchez. Une fois la bonne formule trouvée, ce n'est que du calcul bête et même pas méchant...

On sait que le triangle ABC est rectangle en B.

$$\text{Donc on a : } \cos(\hat{A}) = \frac{AB}{AC}$$

(On utilise le cosinus car par rapport à $\hat{A}$, [AB] est le côté opposé et [AC], qu'on connaît, est l'hypoténuse.)

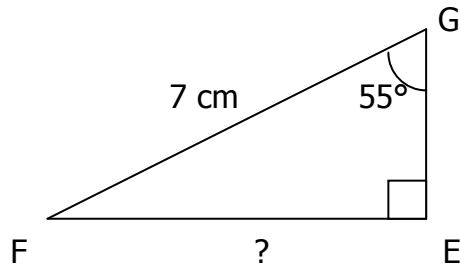
$$\text{D'où : } \cos(25^\circ) = \frac{AB}{9}$$

(Maintenant on multiplie par 9 des deux côtés pour se débarrasser du 9 sous AB)

$$\text{D'où : } AB = 9 \times \cos(25^\circ)$$

$$\underline{AB \approx 8,2 \text{ (cm)}}$$

Exemple 2 :



Déterminer EF :

On sait que le triangle EFG est rectangle en E.

$$\text{Donc on a : } \sin(\hat{G}) = \frac{EF}{FG}$$

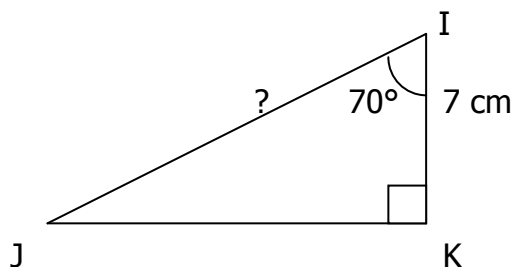
(Par rapport à l'angle $\hat{G}$ on cherche le côté opposé et on connaît l'hypoténuse...)

$$\text{D'où : } \sin(55^\circ) = \frac{EF}{7}$$

$$\text{d'où : } EF = 7 \times \sin(55^\circ)$$

$$\underline{EF \approx 5,7 \text{ (cm)}}$$

Exemple 3 :



Déterminer IJ :

On sait que le triangle IJK est rectangle en K.

$$\text{Donc : } \cos(\hat{I}) = \frac{IK}{IJ}$$

$$\text{d'où } \cos(70^\circ) = \frac{7}{IJ}$$

(Alors là il y a une différence avec les exemples précédents, car ce qu'on cherche est au dénominateur de la fraction et pas au numérateur. Pour éviter les erreurs il suffit d'inverser les deux en se rappelant que $\cos(70^\circ) = \frac{\cos(70^\circ)}{1}$)

Ce qui nous donne :)

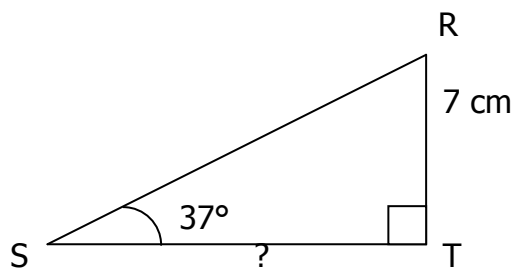
$$\text{d'où : } \frac{IJ}{7} = \frac{1}{\cos(70^\circ)}$$

$$\text{d'où } IJ = \frac{7 \times 1}{\cos(70^\circ)}$$

$$\text{d'où } \underline{IJ \approx 20,5 \text{ (cm)}}$$

Les plus observateurs remarquent que, dans ce cas, pour passer de $\cos(70^\circ) = \frac{7}{IJ}$ à $IJ = \frac{7}{\cos(70^\circ)}$ il suffit simplement de permuter ce qu'on cherche, IJ, avec le cosinus...

Exemple 4 :



Déterminer ST:

On sait que le triangle SRT est rectangle en R.

$$\text{Donc : } \tan(\hat{S}) = \frac{RT}{ST}$$

$$\text{d'où } \tan(37^\circ) = \frac{7}{ST}$$

On permute ST et tan(37°) pour gagner du temps :

$$\text{d'où } ST = \frac{7}{\tan(37^\circ)}$$

$$\text{d'où } \underline{ST \approx 9,3 \text{ (cm)}}$$

V. Utilisation des formules trigonométriques pour retrouver un angle dans un triangle rectangle :

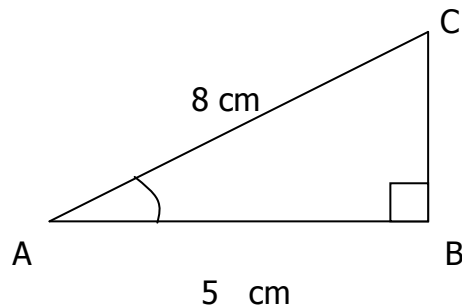
Pour retrouver un angle dans un triangle il suffit de connaître au moins deux longueurs.

Ces deux longueurs nous permettent de trouver la valeur soit du cosinus, soit du sinus soit de la tangente de l'angle (à l'aide de la fraction obtenue par la formule.)

Comme la calculatrice permet de retrouver la valeur d'un angle si on connaît son cosinus, son sinus ou sa tangente, nous pouvons donc l'obtenir cette valeur.

Comme pour la partie précédente, il suffit juste de trouver la bonne formule et c'est gagné...

Exemple 1 :



Déterminer $\hat{A}$:

On sait que le triangle ABC est rectangle en B.

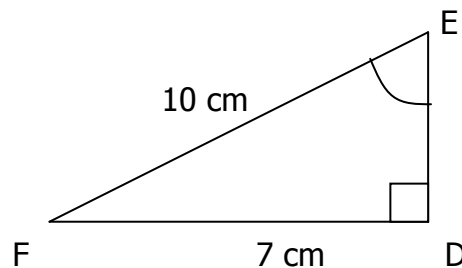
Donc : $\cos(\hat{A}) = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8}$

Grâce à la touche arccos de la calculatrice on trouve $\hat{A} \approx 51,3^\circ$

On n'a pas besoin de déterminer l'écriture décimale de la fraction obtenue. On utilise bien la touche « arccos » et pas « cos » sinon on trouvera pas... et ce serait balot...

On tape donc sur sa calculatrice : arccos (5 : 8) ou arccos (5/8) et la calculatrice, dans sa grande bonté, vous donne l'angle en degrés... Enfin si vous êtes bien en degrés...

Exemple 2 :



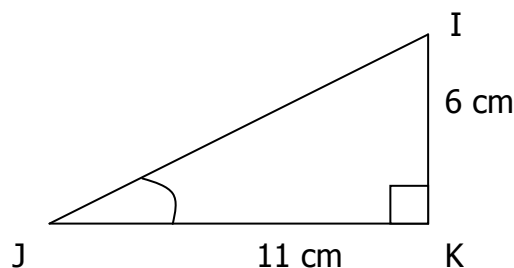
Déterminer $\hat{E}$:

On sait que le triangle EFD est rectangle en D.

Donc : $\sin(\hat{E}) = \frac{FD}{EF} = \frac{7}{10}$

Grâce à la touche arcsin de la calculatrice on trouve : $\hat{E} \approx 44,4^\circ$

Exemple 3 :



Déterminer $\hat{J}$:

On sait que le triangle IJK est rectangle en K.

Donc : $\tan(\hat{J}) = \frac{IK}{JK} = \frac{11}{6}$

Grâce à la touche arctan de la calculatrice on trouve : $\hat{J} \approx 61,4^\circ$

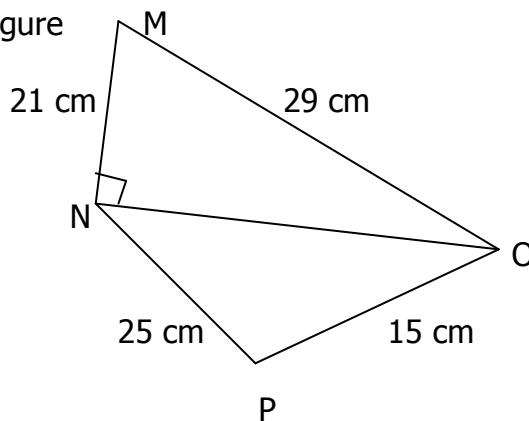
Remarque :

Le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle sont des nombres sans unités.

Evitez donc d'écrire que $\cos(\hat{A}) = 0,78 \text{ cm}$ ou $0,78^\circ$... ça fait mauvais genre...

VI. Un exercice mixant du Pythagore et de la trigonométrie :

On considère cette figure



où MNO est un triangle rectangle en N, $MN = 21 \text{ cm}$, $MO = 29 \text{ cm}$, $NP = 25 \text{ cm}$ et $OP = 15 \text{ cm}$.

1) Déterminer NO :

On sait que le triangle MNO est rectangle en N, donc par le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} MO^2 &= MN^2 + NO^2 \\ 29^2 &= 21^2 + NO^2 \\ 841 &= 441 + NO^2 \\ \text{d'où } NO^2 &= 841 - 441 \\ &= 400 \\ \text{d'où } NO &= \sqrt{400} \\ &= \underline{20 \text{ (cm)}} \end{aligned}$$

2) Le triangle NOP est-il rectangle ? Justifier :

On sait que dans le triangle NOP, [NP] est le plus grand côté.

On a : $NP^2 = 25^2 = 625$

et $NO^2 + OP^2 = 20^2 + 15^2$
 $= 400 + 225$
 $= 625$

Donc on a : $NP^2 = NO^2 + OP^2$

Donc par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NOP est rectangle en O.

3) Déterminer l'angle $\widehat{MOP}$:

On sait que le triangle MON est rectangle en N.

$$\text{Donc : } \sin(\widehat{MON}) = \frac{MN}{MO} = \frac{21}{29}$$

Grâce à la touche arcsin de la calculatrice on trouve : $\widehat{MON} \approx 46,4^\circ$

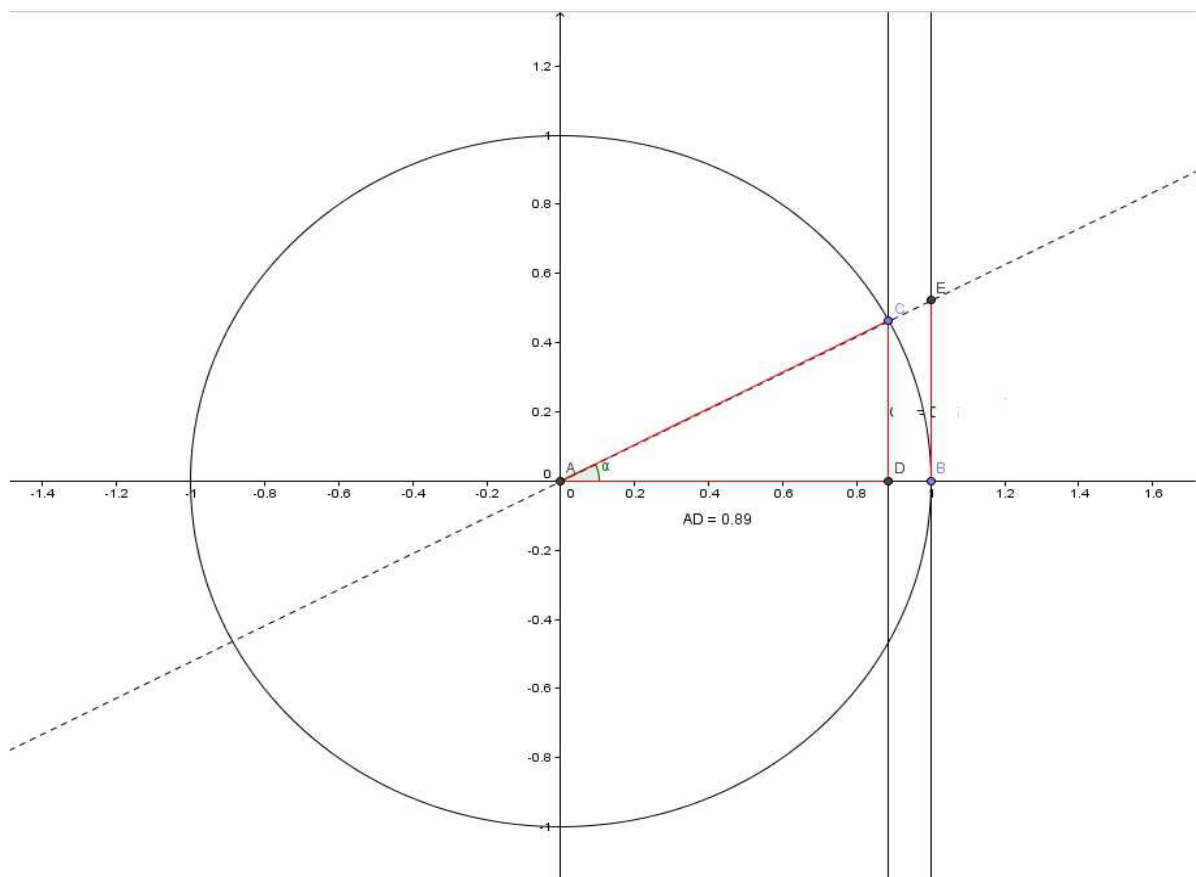
On sait que le triangle NOP est rectangle en O, donc $\widehat{NOP} = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que : } \widehat{MOP} &= \widehat{MON} + \widehat{NOP} \\ &\approx 46,4^\circ + 90^\circ \\ &\approx \underline{136,4^\circ} \end{aligned}$$

VII. Le cercle trigonométrique :

Le cercle trigonométrique est en fait un cercle de rayon 1 unité. En l'utilisant correctement on peut trouver, par lecture graphique, la valeur du cosinus, du sinus et de la tangente de n'importe quel angle aigu.

En voici le principe :



On place un point C sur le cercle. On projette « verticalement » le point C sur l'axe des abscisses (l'axe horizontal). On obtient un point D et le triangle ACD est alors rectangle en D (c'est le triangle rouge ci-dessus.)

On trace aussi une droite verticale à l'abscisse 1. A l'intersection de la droite (AC) avec cette droite on y place un point E. Cela nous donne un segment rouge [BE].

Si on utilise les formules trigonométriques dans le triangle ACD pour l'angle vert (celui de sommet A) on trouve :

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{1} = AD \quad (\text{car } AC = 1 \text{ vu que le cercle a pour rayon } 1)$$

et $\sin(\hat{A}) = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{1} = CD$

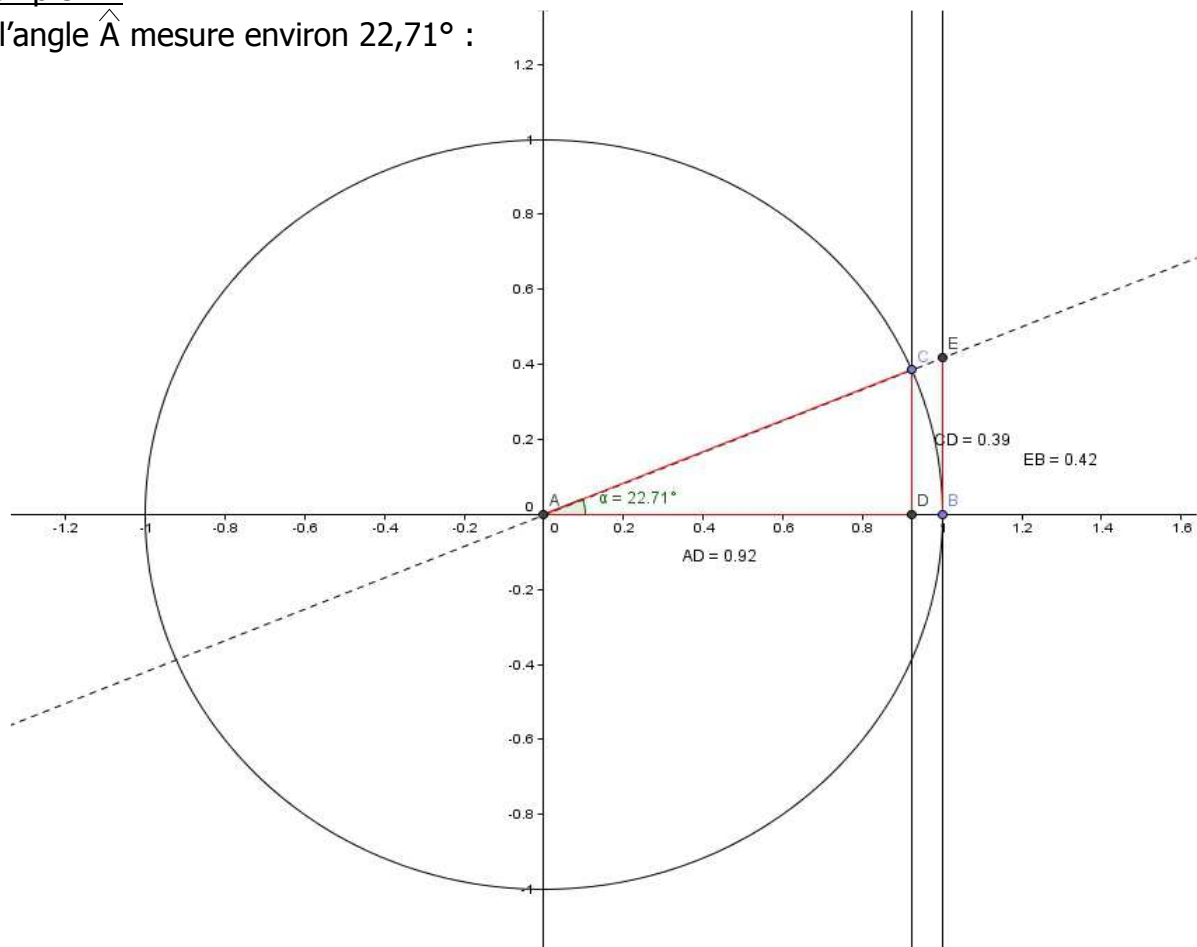
autrement dit, il suffit de lire les mesures AD et CD pour avoir le cosinus et le sinus de l'angle $\hat{A}$.

Le segment rouge [BE] lui nous donnera la valeur de la tangente (croyez-moi cela fonctionne, je ne vous explique pas pourquoi ici pour ne pas compliquer mais cela fonctionne je vous le jure !)

Vous pourrez essayer avec votre calculatrice pour voir que les mesures qu'on trouve sur le dessin correspondent bien à la réalité.

Exemple 1 :

Ici l'angle $\hat{A}$ mesure environ $22,71^\circ$:

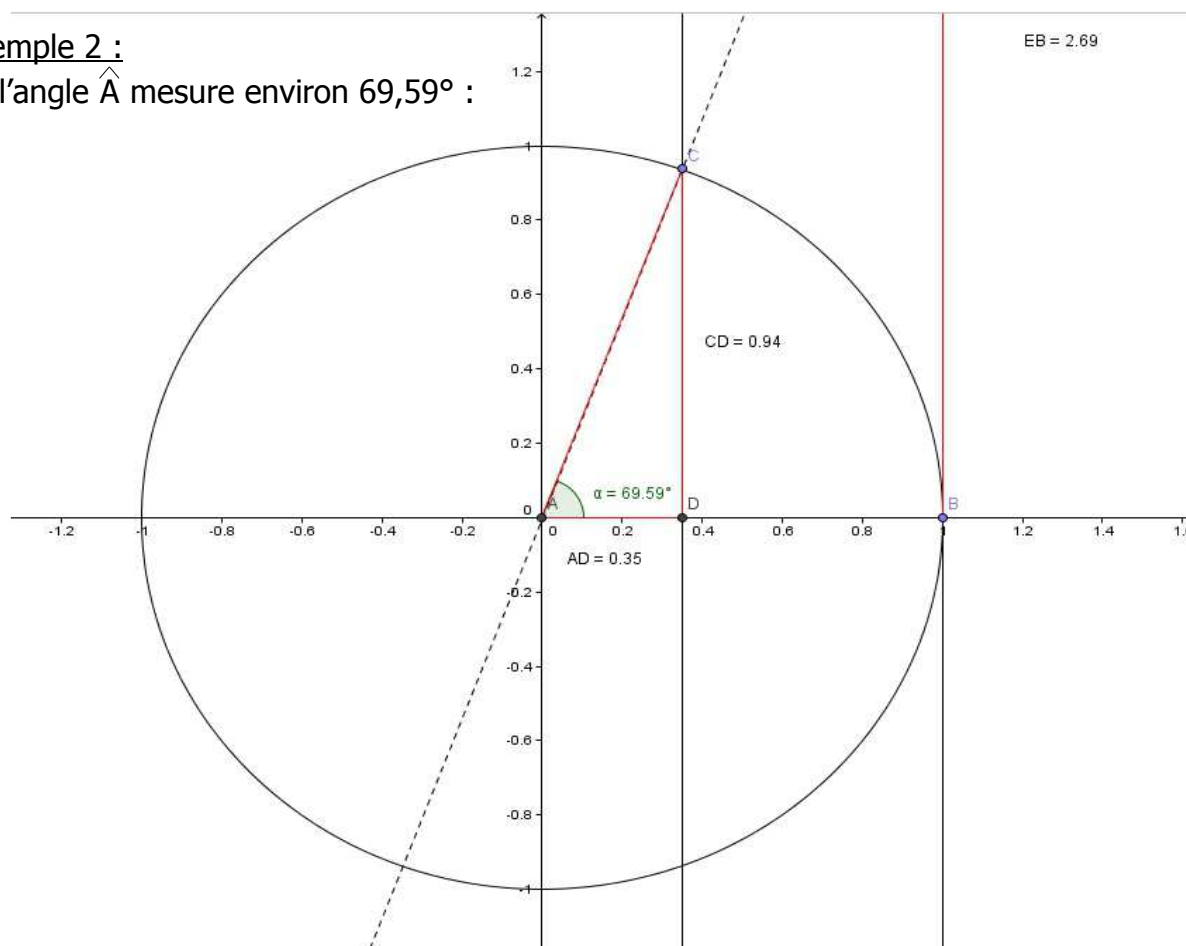


On a $AD \approx 0,92$, $CD \approx 0,39$ et $BE \approx 0,42$

Donc $\cos(\hat{A}) \approx 0,92$ $\sin(\hat{A}) \approx 0,39$ $\tan(\hat{A}) \approx 0,42$

Exemple 2 :

Ici l'angle $\hat{A}$ mesure environ $69,59^\circ$:

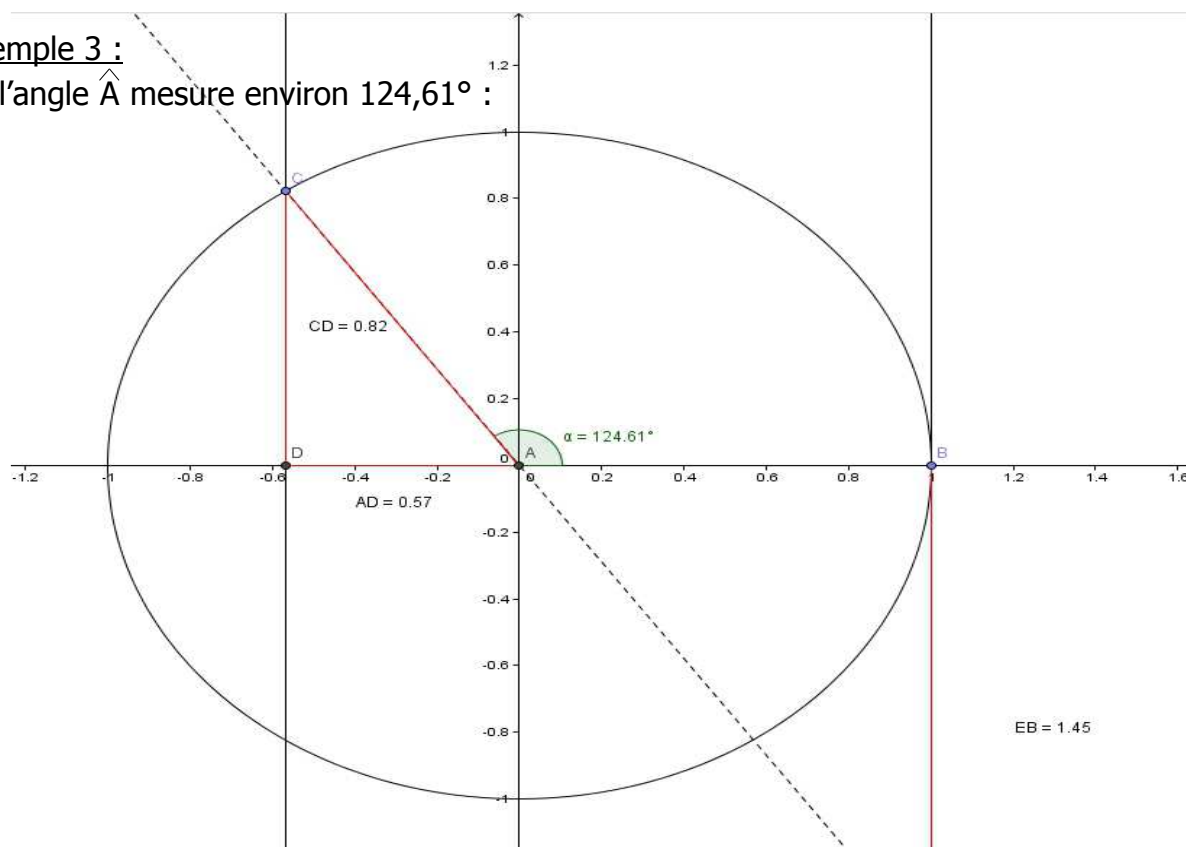


On a $AD \approx 0,35$, $CD \approx 0,94$ et $BE \approx 2,69$

Donc $\cos(\hat{A}) \approx 0,35$ $\sin(\hat{A}) \approx 0,94$ $\tan(\hat{A}) \approx 2,69$

Exemple 3 :

Ici l'angle $\hat{A}$ mesure environ $124,61^\circ$:



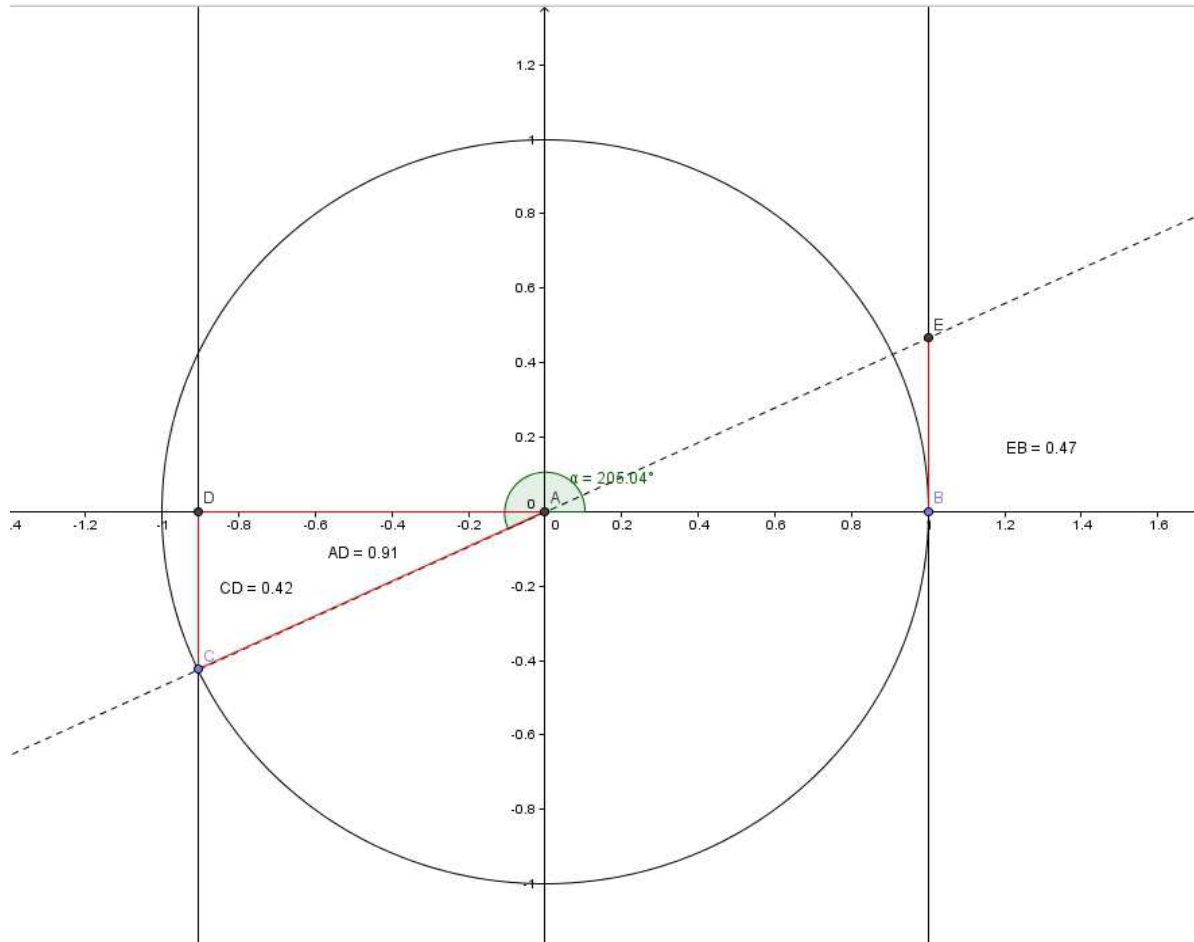
On a $AD \approx 0,57$, $CD \approx 0,82$ et $BE \approx 1,45$

Si on regarde le dessin, le point D est dans la partie négative des abscisses et le point E est dans la partie négative des ordonnées (il est en dessous de l'axe des abscisses...)

Donc $\cos(\hat{A}) \approx -0,57$ $\sin(\hat{A}) \approx 0,82$ $\tan(\hat{A}) \approx -1,45$

Exemple 5 :

Ici l'angle $\hat{A}$ mesure environ $206,04^\circ$:



On a $AD \approx 0,91$, $CD \approx 0,42$ et $BE \approx 0,47$

Comme le point D est dans la partie négative des abscisses, le cosinus sera négatif, comme le point C est dans la partie négative des ordonnées, le sinus sera négatif et comme le point E est dans la partie positive des ordonnées, la tangente sera positive. On obtient donc ici :

Donc $\cos(\hat{A}) \approx -0,91$ $\sin(\hat{A}) \approx -0,42$ $\tan(\hat{A}) \approx 0,47$

Remarques :

Retenez juste que si on trace un cercle de rayon 1, les coordonnées de n'importe quel point du cercle sont le cosinus et le sinus de l'angle entre le centre et ce point du cercle.

Vous venez de comprendre pourquoi certains angles ont des cosinus ou des sinus négatifs. Et aussi pourquoi tangente 90° n'existe pas : si l'angle vert mesure 90° la droite (AC) ne peut couper la droite vertical d'abscisse 1... donc on ne peut pas lire de valeur pour cette tangente...

VIII. Petits compléments :

Il y a deux petites formules concernant les formules trigonométriques, et elles sont valables pour tous les angles (et pas forcément pour les angles aigus dans un triangle.) Je ne vous les démontre pas, ça n'a pas beaucoup d'intérêt pour vous.

- Quel que soit l'angle $\hat{a}$ on a :

$$(\cos (\hat{a}))^2 + (\sin (\hat{a}))^2 = 1$$

- Quel que soit l'angle $\hat{a}$ tel que $\cos (\hat{a}) \neq 0$ on a :

$$\tan (\hat{a}) = \frac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}}$$

Je vous ai mis des parenthèses dans la première formule pour que vous puissiez essayer à la calculatrice et vérifier que cela fonctionne avec n'importe quel angle à la place de $\hat{a}$.

La deuxième formule vous explique pourquoi la tangente d'un angle n'existe pas, par exemple, si $\hat{a} = 90^\circ$ (puisque dans ce cas $\cos 90^\circ = 0$)

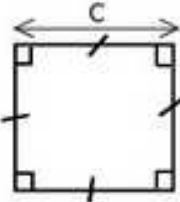
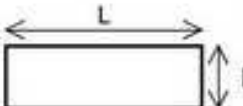
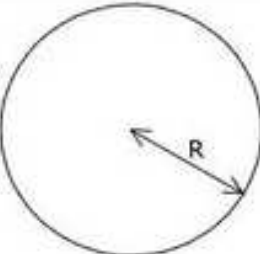
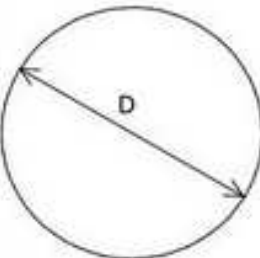
Enfin la première formule montre que si on connaît le cosinus d'un angle on peut trouver le sinus directement (en faisant attention aux signes), et la seconde montre que si on connaît le cosinus et le sinus alors on connaît la tangente.

Donc si on connaît le cosinus on peut trouver les deux autres sans utiliser les touches sinus et tangente de la calculatrice.

FORMULES DE PERIMETRES & D'AIRES

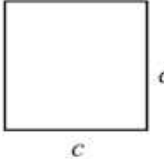
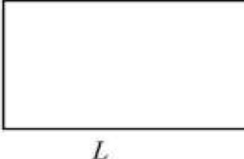
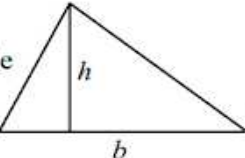
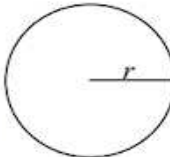
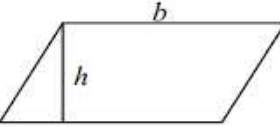
I. Périmètres :

Le périmètre est la longueur du contour d'une figure géométrique...

			
$p = 4 \times c$	$p = 2 \times L + 2 \times l$ $= 2 \times (L + l)$	$p = 2 \times \pi \times R$	$p = \pi \times D$

II. Aires :

L'aire est la surface contenue à l'intérieur d'une figure géométrique...

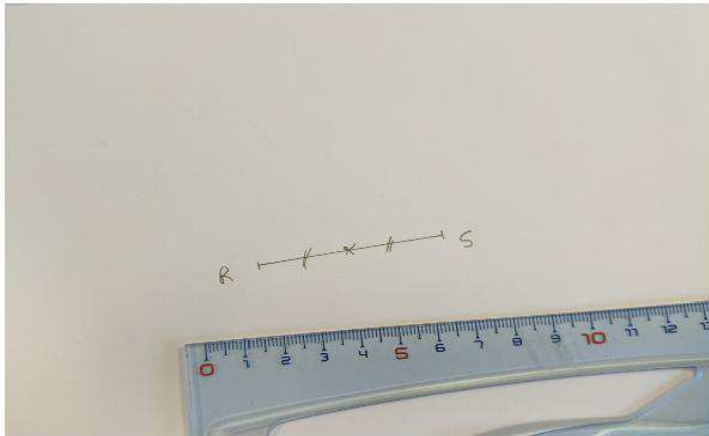
Carré  c : côté du carré $\mathcal{A} = c \times c$	Rectangle  l : largeur et L : longueur $\mathcal{A} = l \times L$
Triangle b : longueur d'un côté du triangle h : hauteur associée  $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$	
Disque r : rayon du disque  $\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$ π désigne un nombre. $\pi \approx 3,141592$	
Parallélogramme  b : longueur d'un côté h : hauteur associée $\mathcal{A} = b \times h$	

I. Les droites de base :

Médiatrices de segments et bissectrices d'angles sont deux droites que tout le monde doit pouvoir construire sans se tromper. Elles devront souvent être tracées dans des triangles car elles font partie des droites de base de ces figures géométriques...

1) Construire une médiatrice à la règle et à l'équerre :

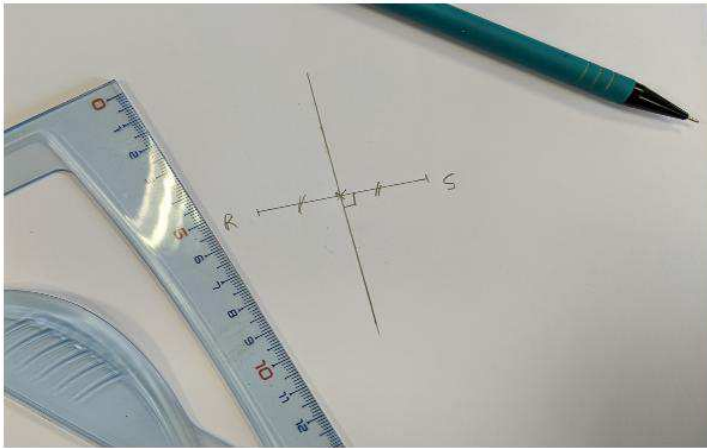
On place le milieu du segment dont on veut construire la médiatrice :



On plaque l'équerre contre le segment avec le coin de l'angle droit sur le milieu :



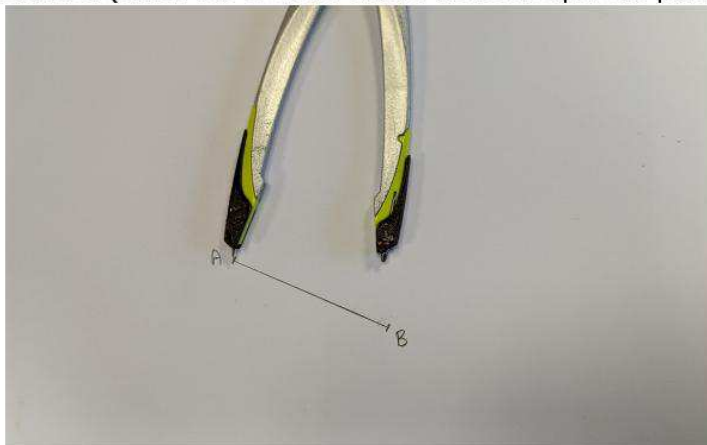
On trace et on prolonge et on admire sa belle médiatrice !



2) Construire une médiatrice au compas :

La construction est plus précise et plus rapide qu'avec la règle et l'équerre. Attention cependant à ne pas vous perdre dans les arcs de cercle si vous devez en tracer plusieurs, par exemple si vous devez tracer les trois médiatrices d'un triangle.

On prend un écartement plus grand que la moitié du segment dont on veut tracer la médiatrice (sinon les arcs de cercle ne se couperont pas...)

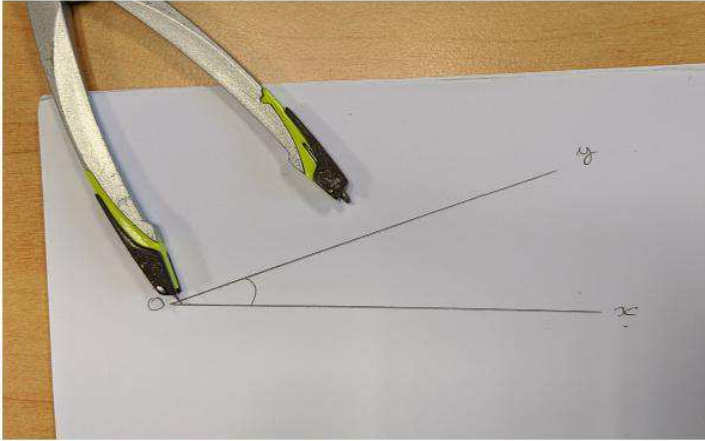


3) Construire la bissectrice d'un angle :

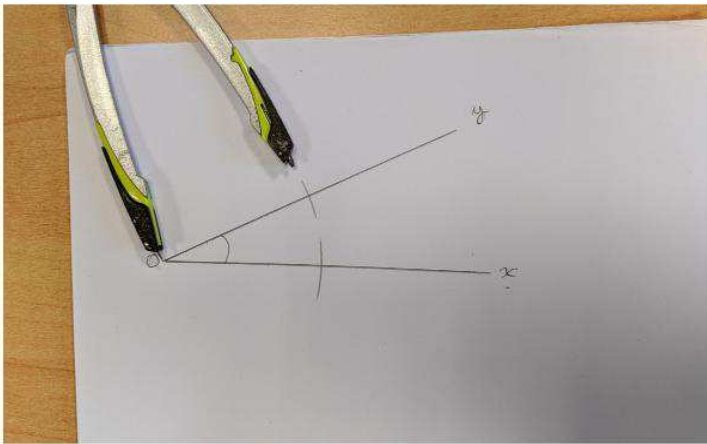
On peut très bien utiliser le rapporteur pour tracer une bissectrice : on mesure l'angle et on cherche la moitié, etc.

Il faut cependant connaître la méthode au compas qui permet de la tracer sans avoir rien à mesurer, et sans risque d'erreur quand on se trompe en cherchant la moitié de cette mesure...

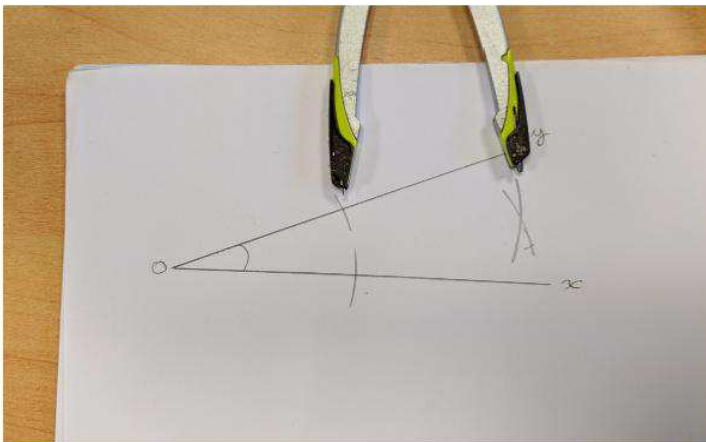
On prend un écartement au hasard avec le compas (pas trop petit) qu'on va garder pendant toute la construction :



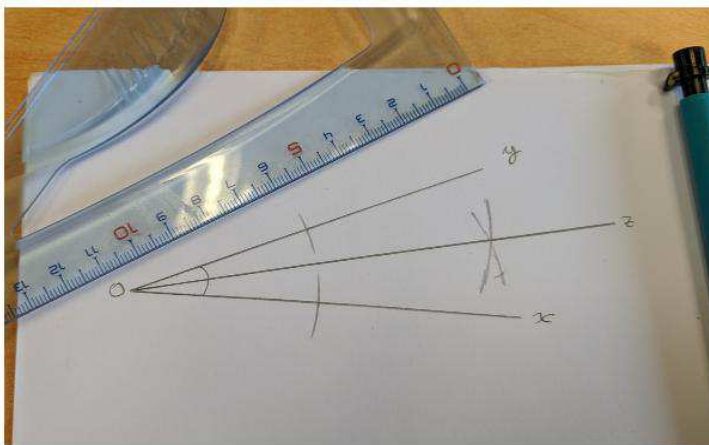
On trace deux arcs de cercle de centre le sommet de l'angle qui coupent les deux côtés de l'angle :



En gardant l'écartement du compas on pointe sur les deux points d'intersection obtenus et on fait deux arcs de cercle qui se coupent « à l'intérieur » de l'angle :



Il n'y a plus qu'à tracer la droite (ou demi-droite) qui passe par le sommet de l'angle et le point d'intersection obtenu :



Ici la demi-droite $[Oz)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

II. Placer des points situés à certaines distances d'autres points :

Il faut retenir une chose importante : la règle graduée ne sert qu'à mesurer la distance entre deux points ou à placer un point situé à une certaine distance d'un autre et c'est tout. Dans la plupart des cas il faut utiliser le compas pour placer correctement et précisément des points !

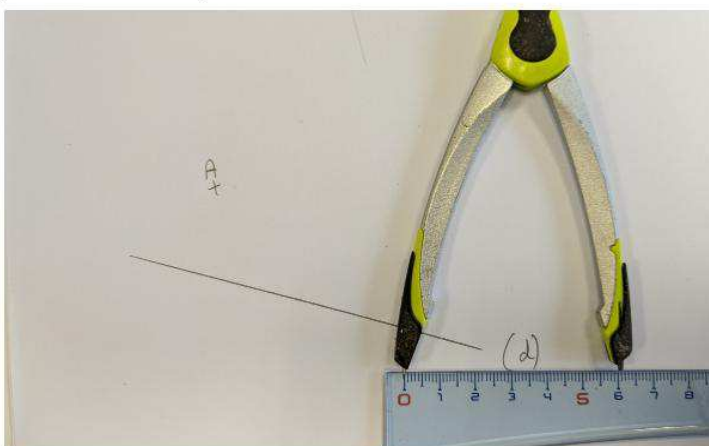
Un moyen simple de savoir quand on doit utiliser son compas et pas sa règle :

SI VOUS UTILISEZ VOTRE REGLE EN LA FAISANT TOURNER « POUR QUE CA MARCHE » C'EST LE COMPAS QU'IL FAUT UTILISER !

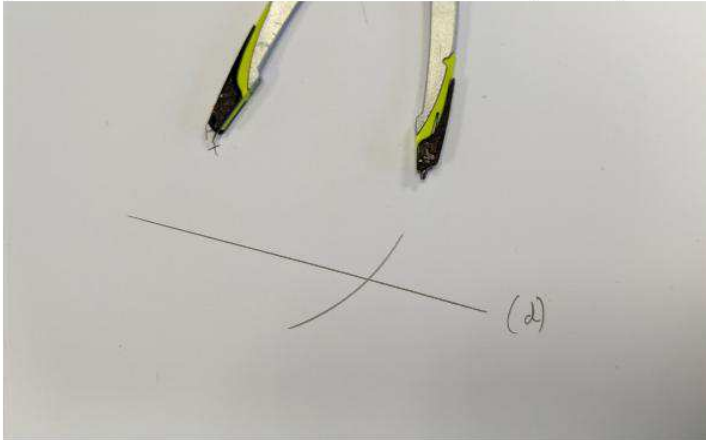
1) Placer un point situé à une certaine distance d'un autre et devant appartenir aussi à une droite (ou un cercle, ou ce que vous voulez...) :

Dans cet exemple on doit placer un point B tel que $AB = 6 \text{ cm}$ et $B \in (d)$.

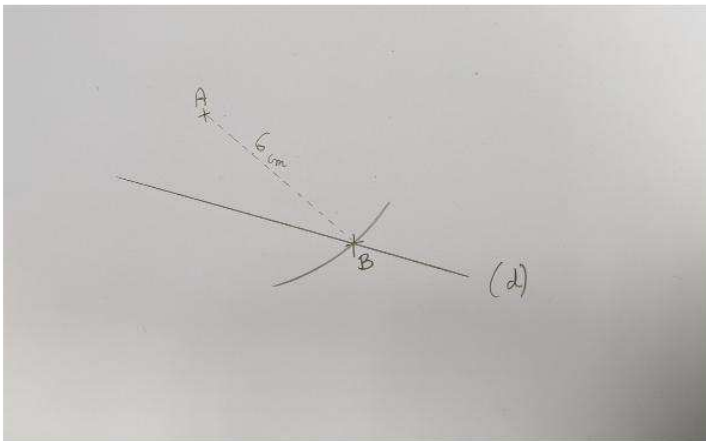
On prend son compas avec un écartement de 6 cm :



On pointe sur A et on fait un arc de cercle qui coupe la droite (d) :



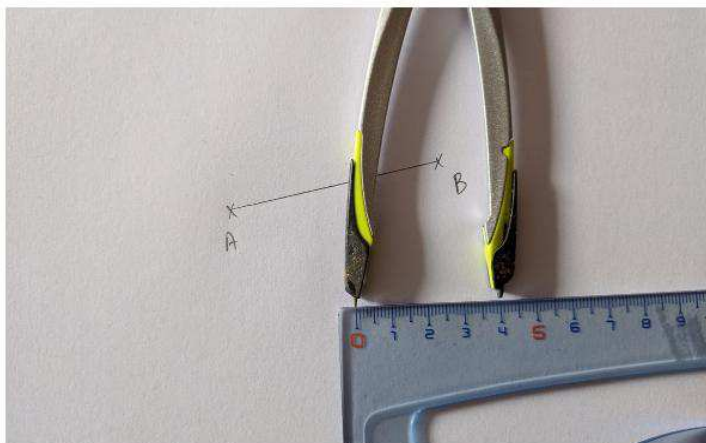
Le point B est à l'intersection de (d) et de l'arc de cercle :



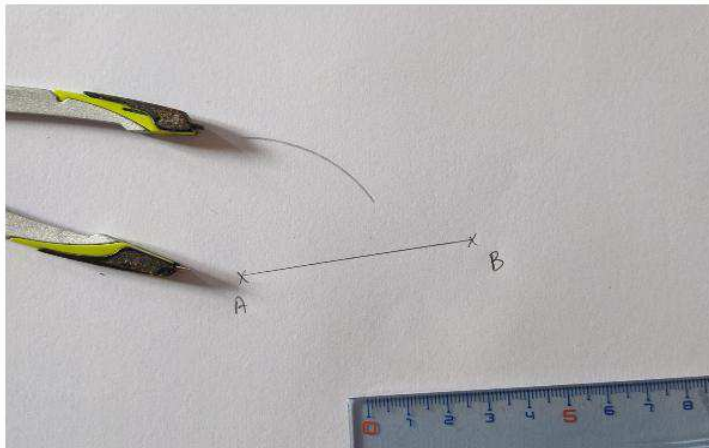
2) Placer un point situé à deux distances données de deux autres points :

Dans cet exemple on va placer un point C tel que $AC = 4$ cm et $BC = 6$ cm (les points A et B étant donnés.)

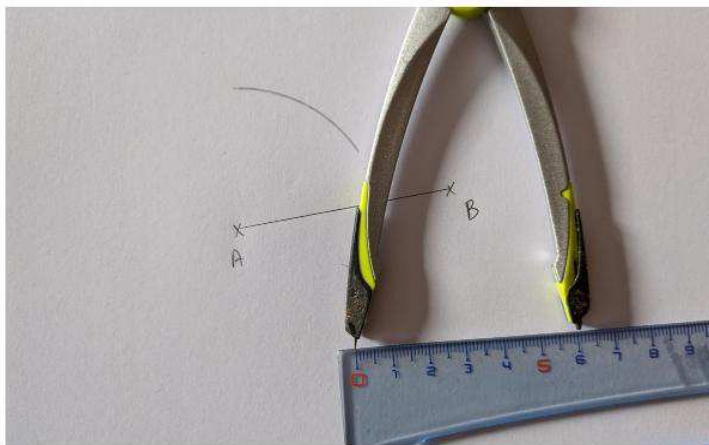
On prend un écartement de 4 cm avec le compas :



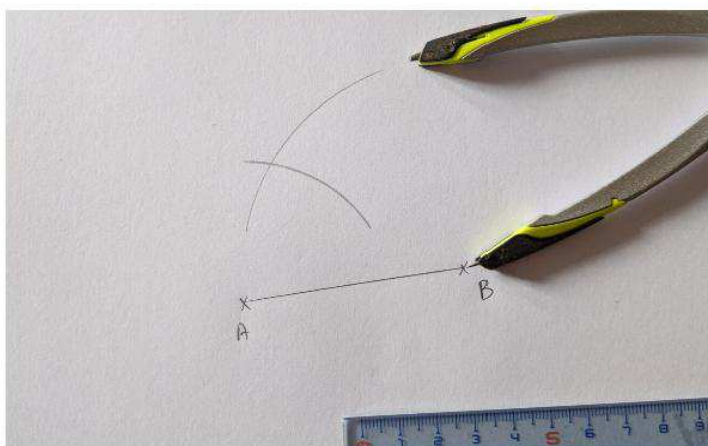
On pointe sur A et on fait un arc de cercle (qu'on prolongera si nécessaire par la suite au cas où...)



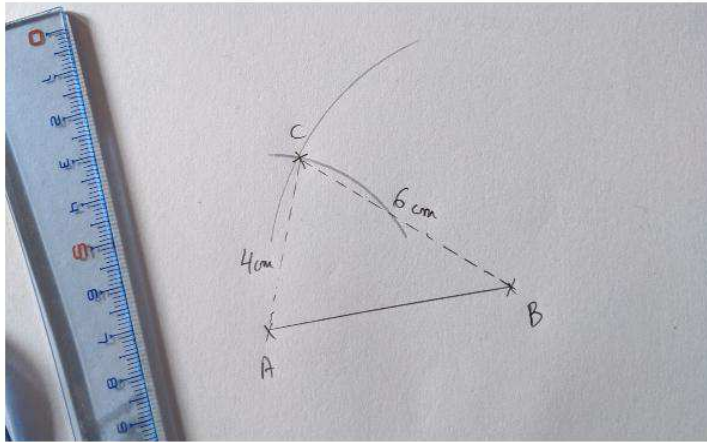
On prend maintenant un écartement de 6 cm avec le compas :



Et on pointe sur B et on fait un arc de cercle qui coupe le précédent (qu'on prolonge s'il est trop petit...)



On obtient le point C à l'intersection des deux arcs de cercle :



Cette méthode est celle utilisée pour construire des triangles dont on connaît les 3 côtés.

On remarque que cette construction n'est possible que si les distances données respectent les inégalités triangulaires.

Dans l'exemple ci-dessus, il faut que $AC + BC > AB$ pour que cela soit possible...

III. Les deux autres droites du triangle :

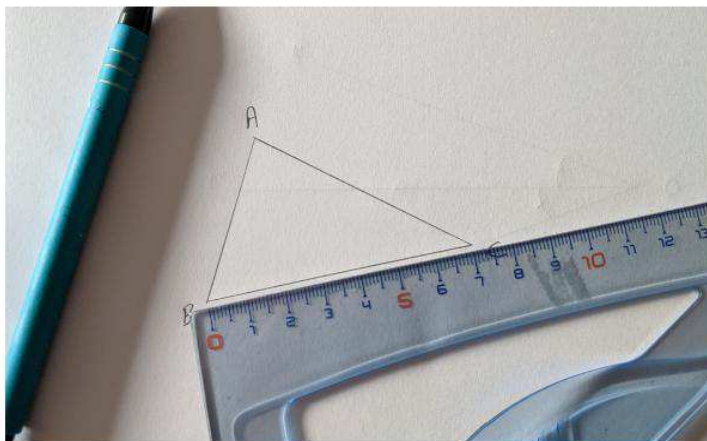
Outre les médiatrices et les bissectrices, il existe aussi les médianes et les hauteurs.

(Voir la partie correspondante pour la définition de ces droites...)

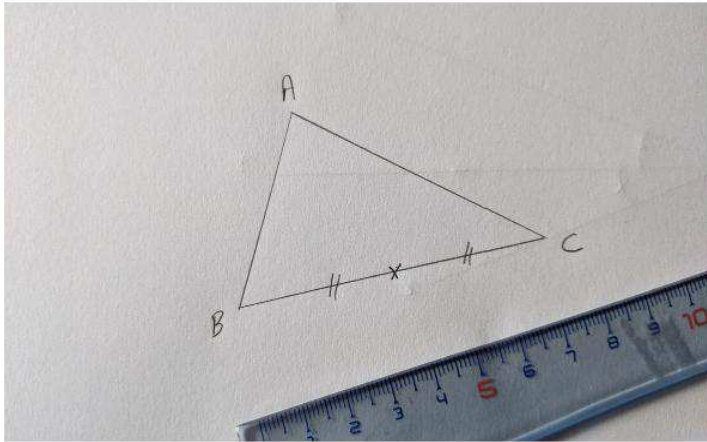
1) Les médianes :

C'est la plus simple des droites à construire dans un triangle.

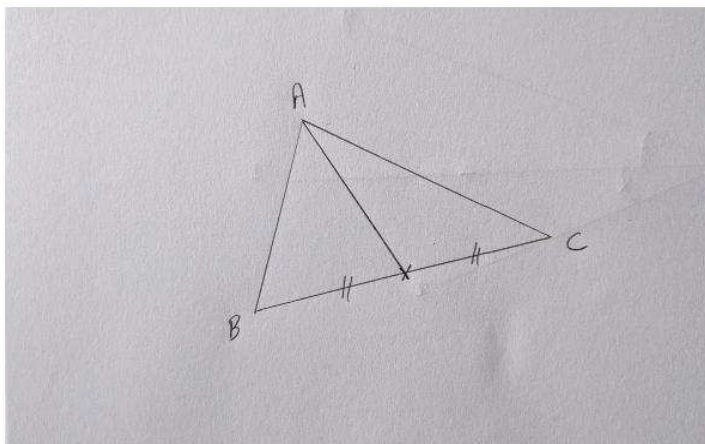
Quand on veut tracer la médiane issue d'un des sommets du triangle, on commence par placer le milieu du côté opposé à ce sommet. Ici on va tracer la médiane issue de A dans le triangle ABC :



On place le milieu du côté :



On trace le segment (ou la droite) d'extrémités A et le milieu de [BC] et on a notre médiane :

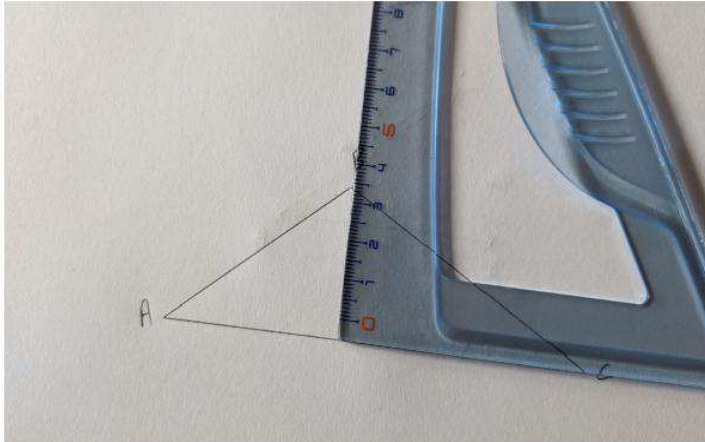


2) Les hauteurs :

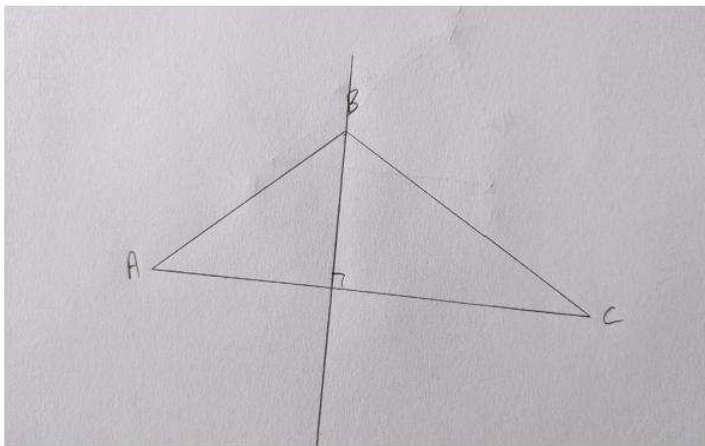
Les hauteurs (utilisées entre autres pour calculer l'aire d'un triangle) posent parfois des problèmes, en particulier lorsque le triangle a un angle obtus (supérieur à 90°). En effet, dans ce cas les hauteurs « sortent » du triangle et on peut être perdu dans leur construction.

Dans l'exemple qui suit je vous montre deux hauteurs dans ce cas là pour que vous compreniez comment on fait.

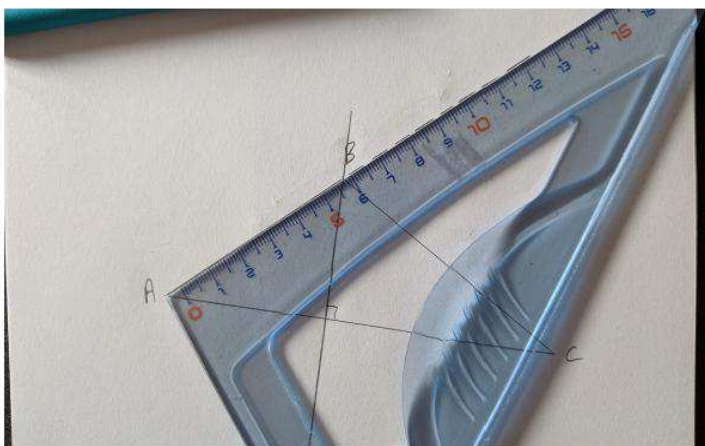
Dans le triangle ABC ci-dessous on va tracer la hauteur issue de A. On plaque l'équerre contre le côté opposé [BC] et on la fait glisser jusqu'en A :



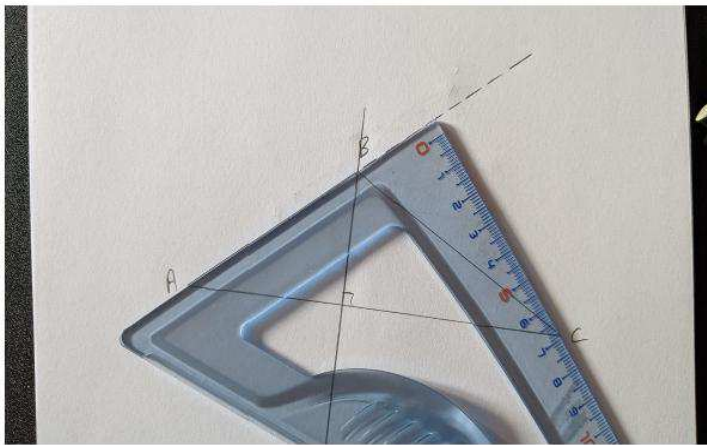
On trace la hauteur issue de A :



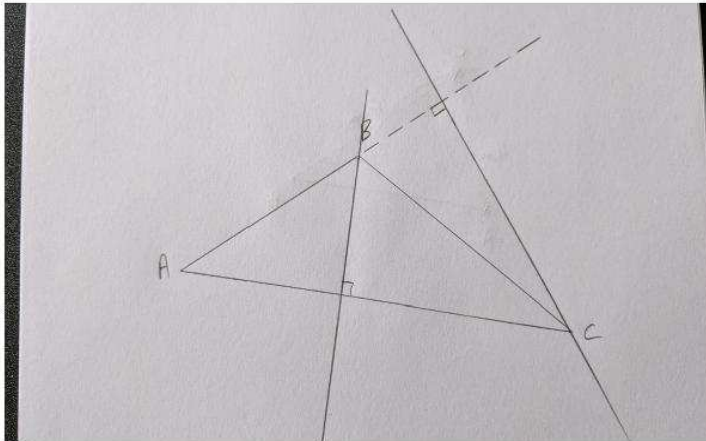
Pour tracer la hauteur issue de C, on doit plaquer l'équerre contre son côté opposé [AB] et la faire glisser jusqu'en C. On prolonge donc (AB) :



Et maintenant on plaque l'équerre contre cette droite, prolongée en pointillée, jusqu'en C :



On trace et on obtient la hauteur issue de C (qui est à l'extérieur du triangle) :



Remarque :

On se souvient bien que si vous tracez 3 hauteurs ou 3 médiatrices ou 3 bissectrices ou 3 médianes elles sont concourantes (elles se coupent en un seul point.)

Donc si vous en avez déjà tracé 2 sur 3, la troisième est plus facile à faire car vous avez déjà obtenu ce point d'intersection.

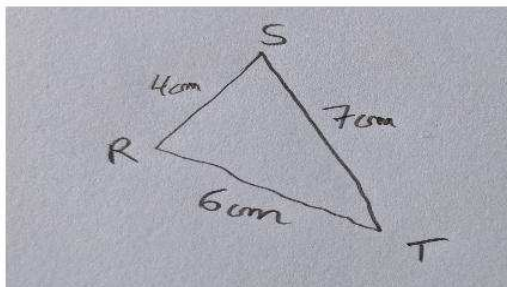
(Voir aussi dans la partie concernant les triangles les noms et utilisations de ces points d'intersection...)

IV. Les triangles :

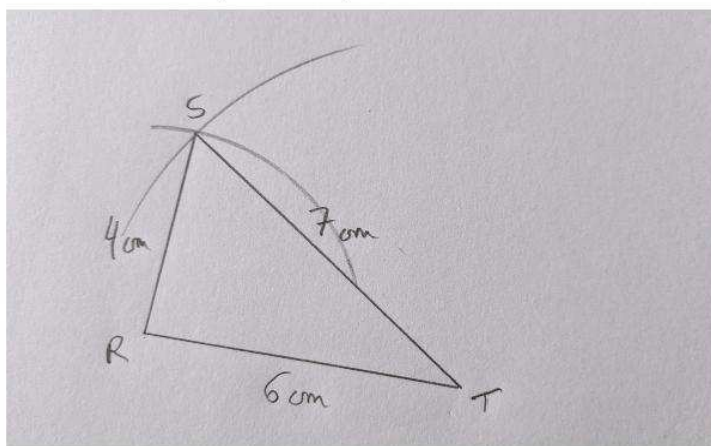
Il existe différents types de triangle et, suivant leurs natures et les indications données, les constructions ne sont pas tout à fait identiques. Mais bon, la plupart du temps vous devrez utiliser le compas comme d'habitude...

1) Tracer un triangle connaissant ses 3 côtés :

Si on veut construire ce triangle :



On trace un de ses côtés et on trouve le troisième côté avec deux arcs de cercle (voir avant comment on place un point situé à deux distances de deux points...)

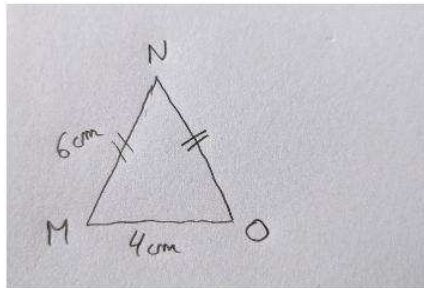


Ici on d'abord tracé [RT] puis on a placé le sommet S à l'aide du compas.

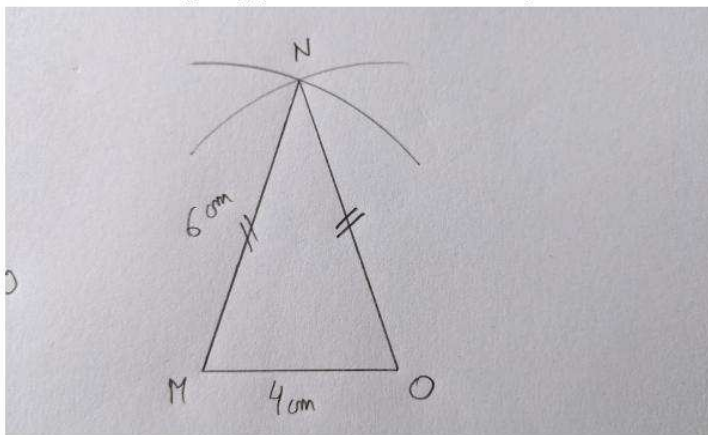
2) Tracer un triangle isocèle :

C'est la même chose que ci-dessus. Il faut juste faire attention à où le triangle est isocèle (c'est à dire au sommet où les deux côtés égaux se rejoignent.) Généralement on trace en premier le côté ayant une longueur unique, ce qui permet de faire deux arcs de cercle sans changer l'écartement :

Si on veut par exemple construire un triangle MNO isocèle en N tel que $MN = 6$ cm et $MO = 4$ cm :



On trace d'abord [MO] puis à l'aide du compas on trouve le sommet N :



3) Tracer un triangle équilatéral :

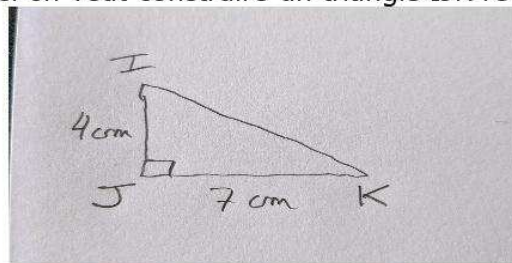
Y a-t-il vraiment besoin d'explications ? (Il a ses 3 côtés égaux...)

4) Tracer un triangle rectangle : premier cas :

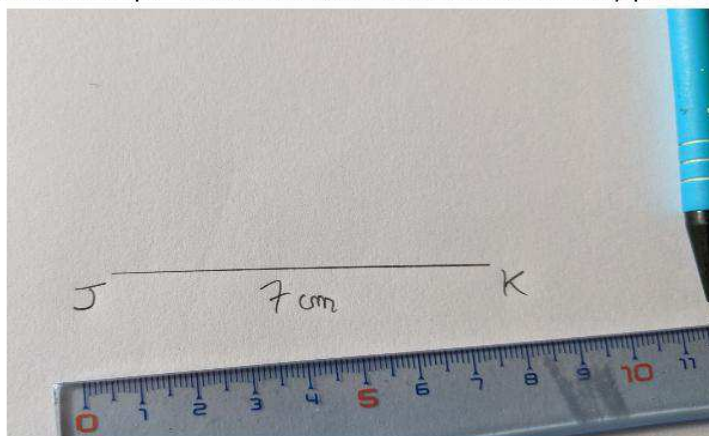
Pour construire un triangle rectangle, deux longueurs suffisent.

Si on vous donne les longueurs des deux côtés perpendiculaires la construction est simple et ne nécessite qu'une équerre...

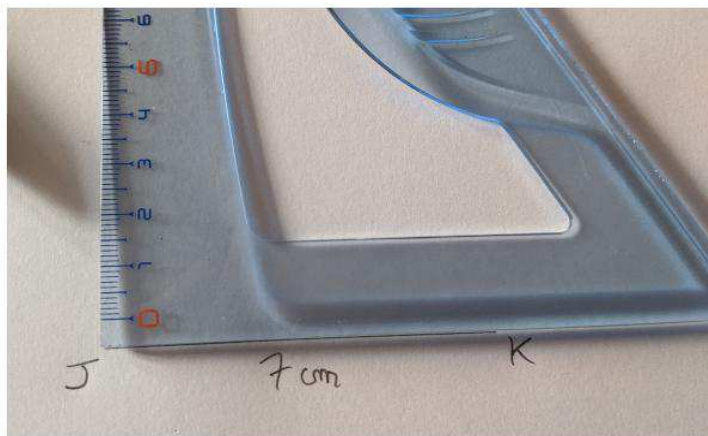
Par exemple, si on veut construire un triangle IJK rectangle en J tel que $IJ = 4 \text{ cm}$ et $JK = 7 \text{ cm}$:



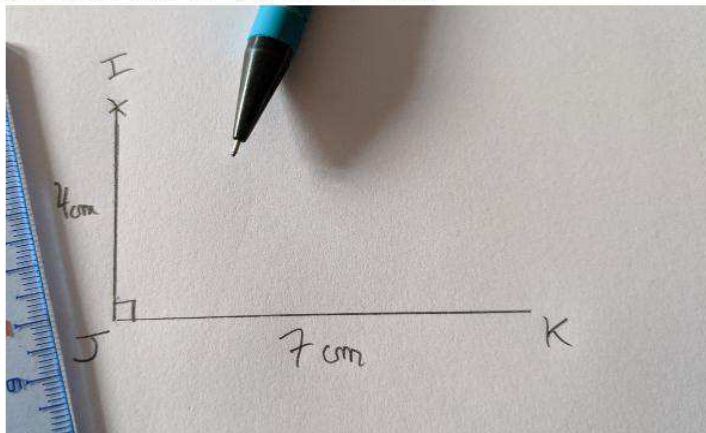
On commence par tracer un des deux côtés connus, par exemple [JK] :



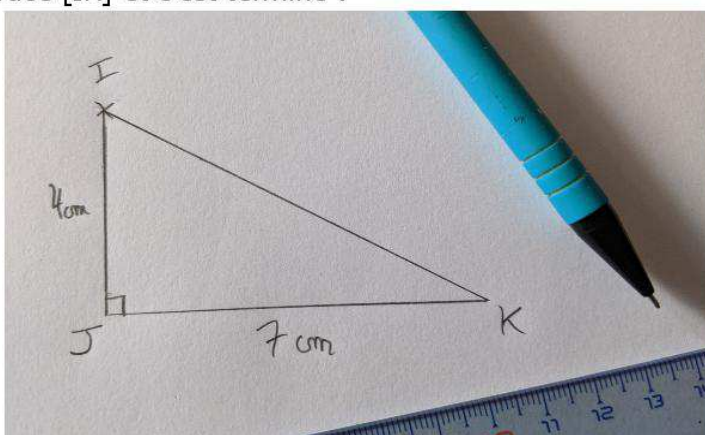
Ensuite on plaque l'équerre contre [JK] avec le coin de l'angle droit sur J :



On trace alors [JI] tel que $JI = 4 \text{ cm}$:



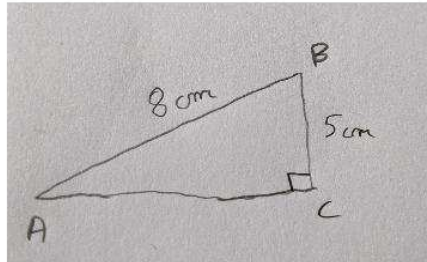
On trace [IK] et c'est terminé :



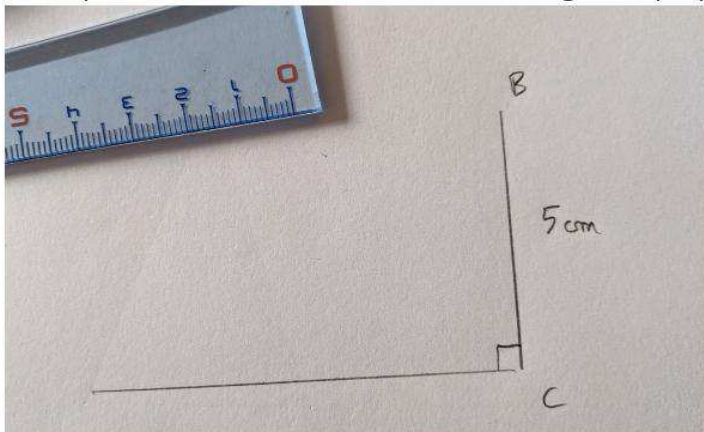
5) Construire un triangle rectangle : second cas :

On peut aussi vous donner comme longueur un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse, c'est à dire le plus grand côté. La construction ne se fait alors pas de la même façon :

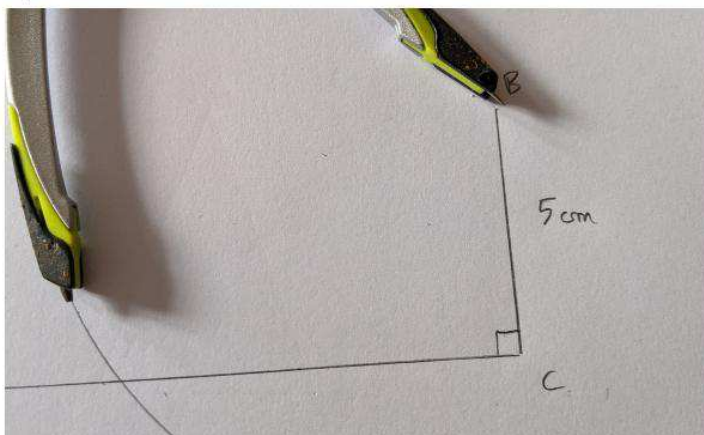
Par exemple, si on doit construire un triangle ABC rectangle en C tel que $AB = 8\text{ cm}$ et $BC = 5\text{ cm}$:



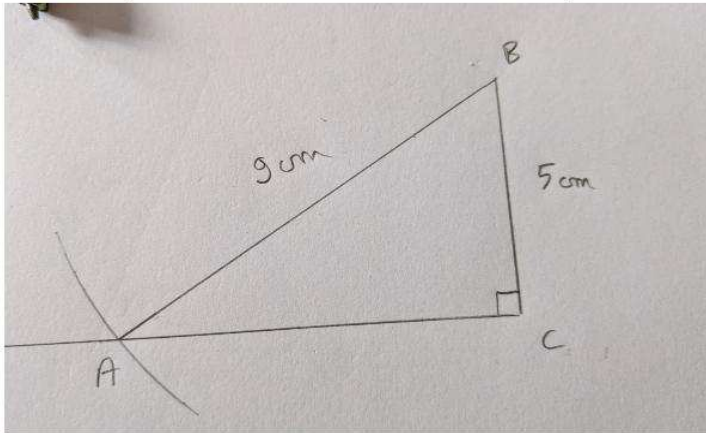
On commence par tracer le côté de l'angle droit qu'on connaît, ici on trace donc [BC] et avec l'équerre on trace une demi-droite d'origine C perpendiculaire à (BC) :



On sait que le point A est sur cette demi-droite. Il est aussi à 8 cm de B. Donc on prend le compas et on trace un arc de cercle en pointant sur B de 8 cm de rayon qui va couper la demi-droite :



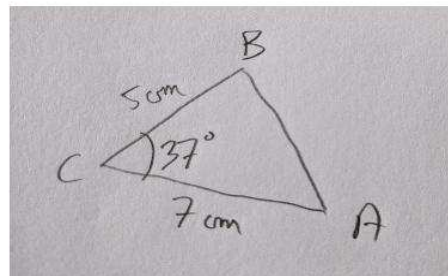
On obtient le point A à l'intersection et on complète le triangle :



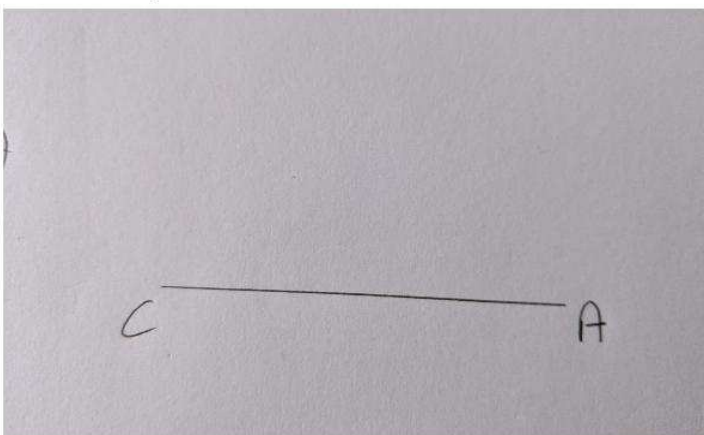
6) Construire un triangle connaissant deux côtés et un angle : premier cas :

C'est le cas où on connaît la mesure de l'angle entre les deux côtés donnés.

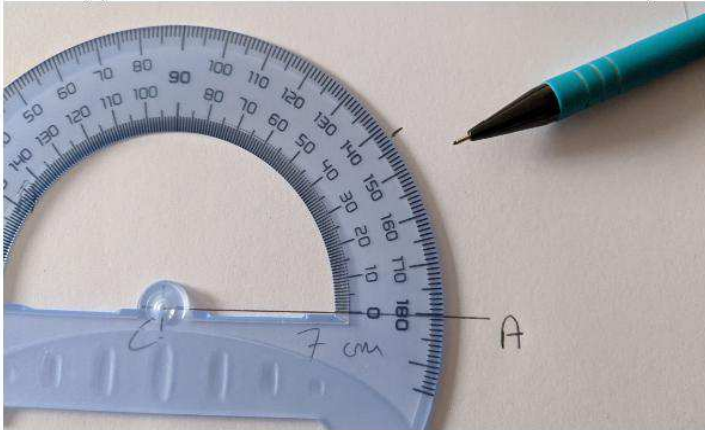
Par exemple on va construire ce triangle :



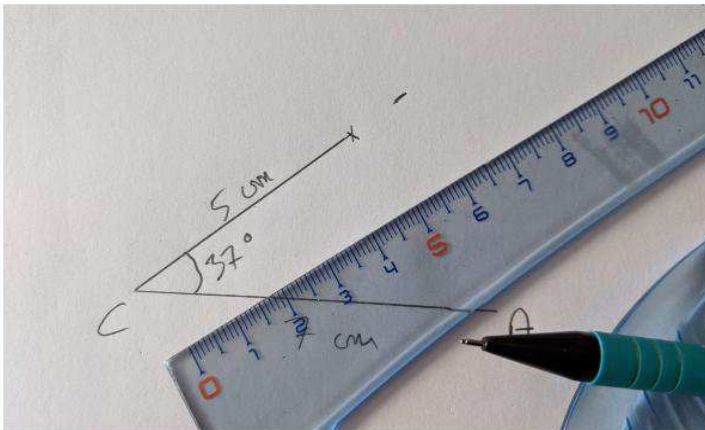
On commence par tracer un deux côtés connus :



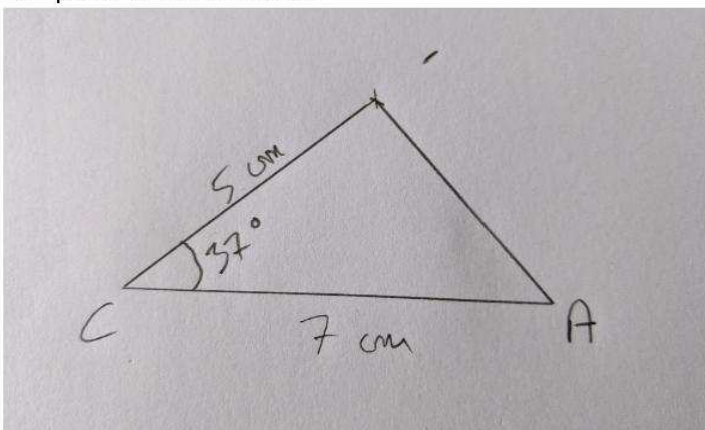
Avec le rapporteur on cherche les 37° et on les marque :



En traçant du sommet C vers la marque des 37° on place le point B à 5 cm de C:



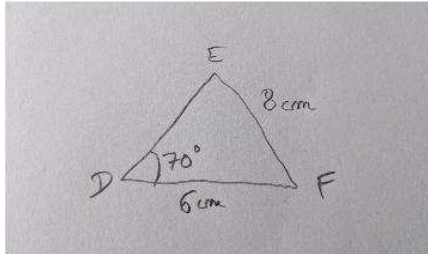
On complète la construction



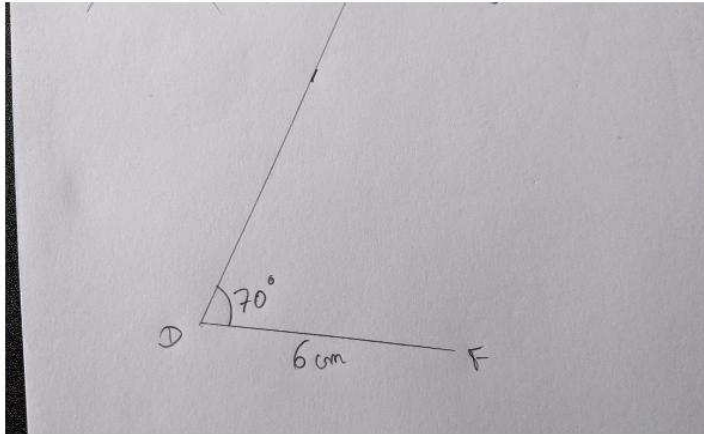
7) Construire un triangle connaissant un angle et deux côtés : second cas :

Il se peut que l'angle qu'on vous donne ne soit pas « entre » les deux longueurs données. La méthode est donc un peu différente...

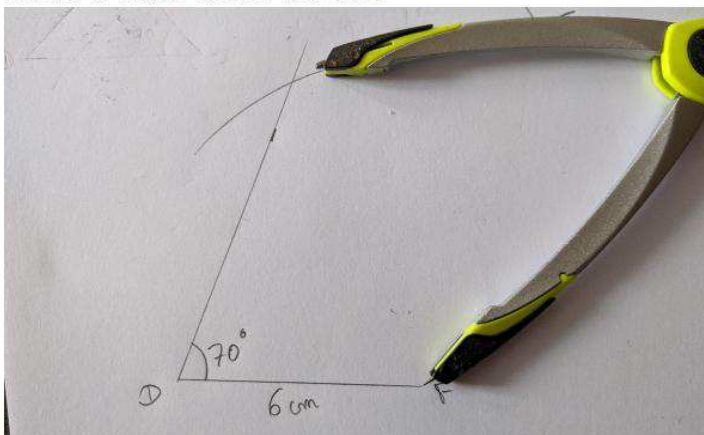
On va construire ce triangle :



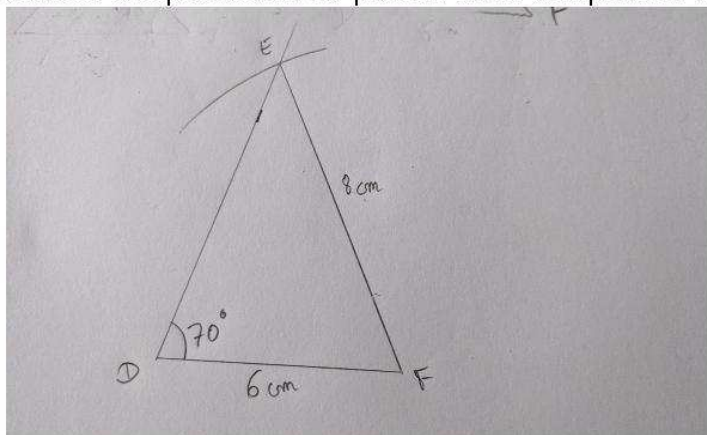
Ici, pas le choix, on commence par tracer le côté qui « touche » l'angle donné. Puis avec le rapporteur on trace une demi-droite d'origine D faisant un angle de 70° avec (DF) :



Comme le point E est sur cette demi-droite et se trouve à 8 cm de F, pas le choix, on prend le compas ! Un écartement de 8 cm, on pointe sur F et on coupe avec un arc de cercle la demi-droite tracée :



On obtient l'emplacement du point E et on complète le triangle :

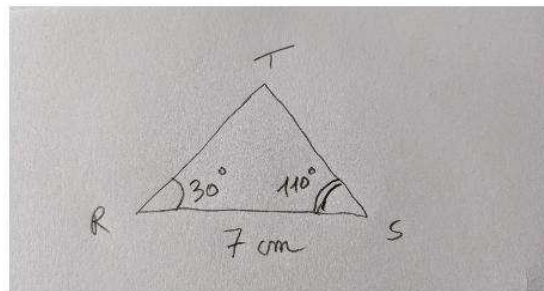


8) Construire un triangle connaissant une longueur et deux angles :

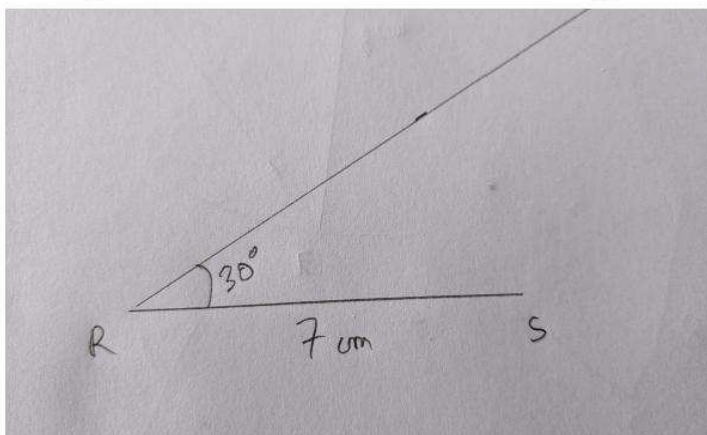
Si on vous donne deux angles dans un triangle, vous les connaissez tous car la somme des trois est égale à 180° .

Donc peu importe quels sont les deux angles qu'on vous donne, on en revient toujours au cas où vous connaissez une longueur et les deux angles qui « touchent » cette longueur connue.

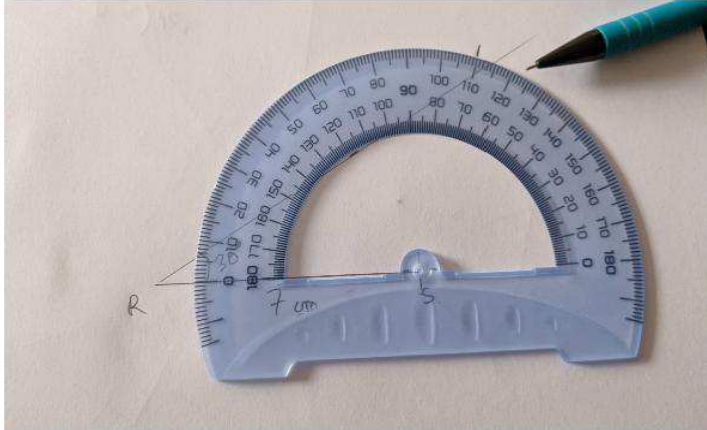
Par exemple, construisons ce triangle :



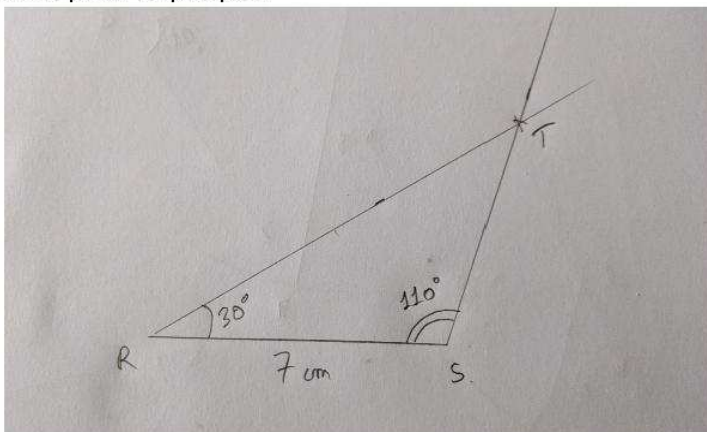
On n'a pas trop le choix au départ, on trace le seul côté connu (ici c'est [RS]), puis avec le rapporteur on trace une demi-droite d'origine R faisant un angle de 30° :



On place maintenant le rapporteur sur S et on va tracer une demi-droite faisant un angle de 110° (attention avec l'utilisation du rapporteur... je dis ça je dis rien...)



On trace et à l'intersection des deux demi-droites on trouve le troisième sommet !
Victoire pour le peuple !



V. Les parallélogrammes :

Quand vous aurez à construire un parallélogramme, un rectangle, un carré ou un losange, les indications que vous aurez (angles droits, côtés égaux, etc.) vous permettront facilement de voir comment placer 3 des 4 sommets (souvent aussi en utilisant une des deux diagonales.)

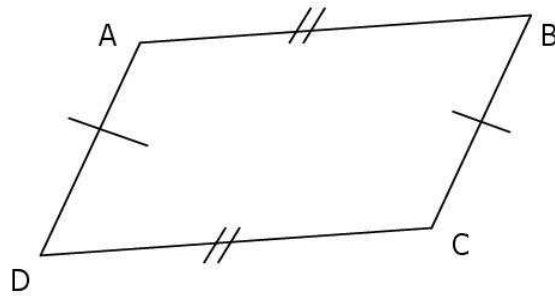
Il s'agit alors de construire un triangle comme dans les méthodes précédentes.

Une fois ces 3 sommets placés, la fin de la construction, quel que soit le parallélogramme, est toujours la même et hyper simple : il suffit de se rappeler que dans n'importe quel parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur.

Deux coups de compas suffisent alors à terminer la construction !

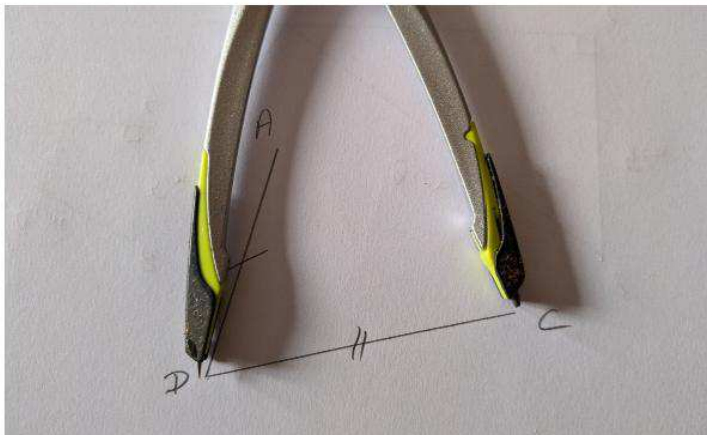
Par exemple, supposons qu'on doive construire un parallélogramme ABCD et qu'on a déjà réussi à placer les points A, C et D.

D'après le dessins à main levé ci-dessous :

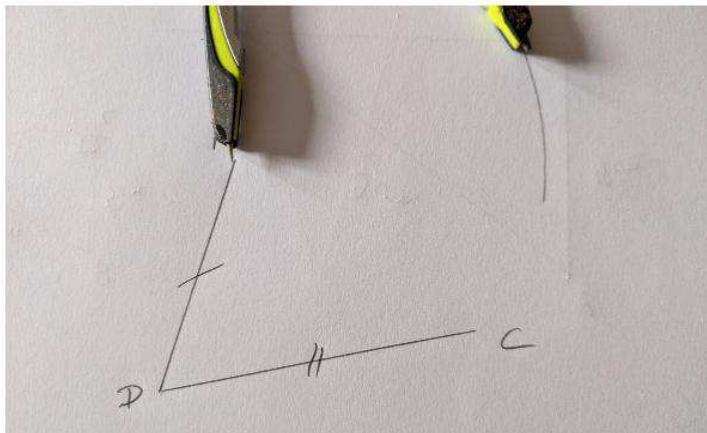


On sait que $AB = DC$ et $AD = BC$.

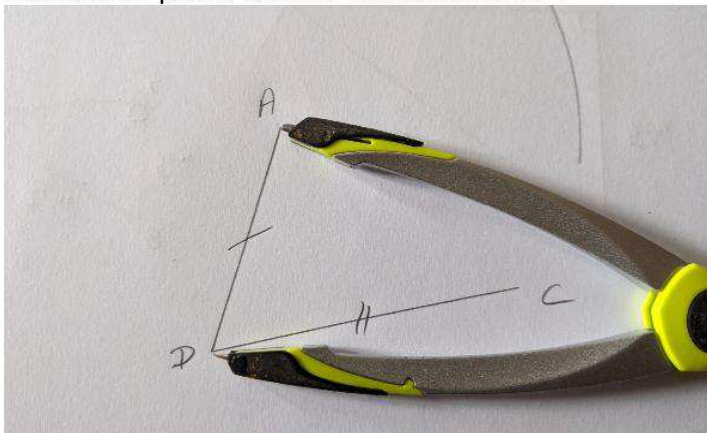
On prend son compas et on prend DC comme écartement :



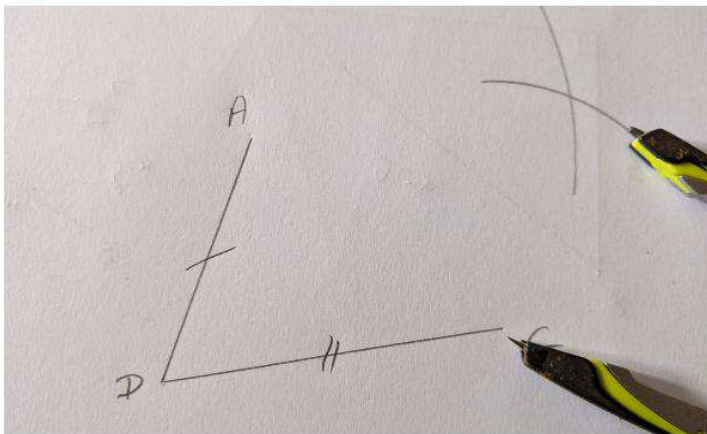
On va sur A et on fait un arc de cercle dans le secteur où doit se trouver le point B :



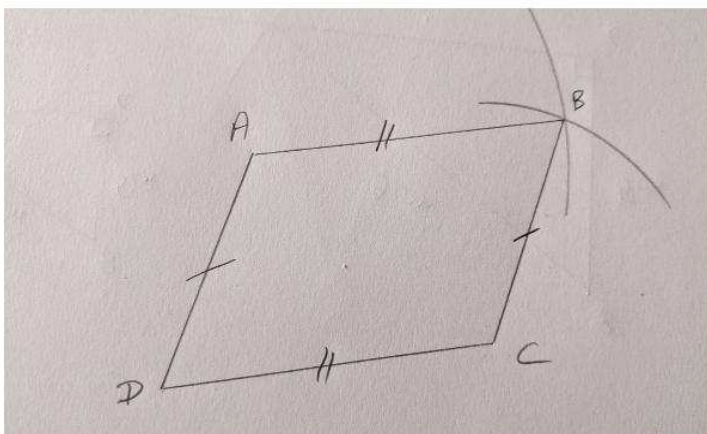
Maintenant on prend comme écartement AD :



Et on pointe sur C et on fait un arc de cercle qui coupe le premier :



A l'intersection on trouve donc le point B et on complète :

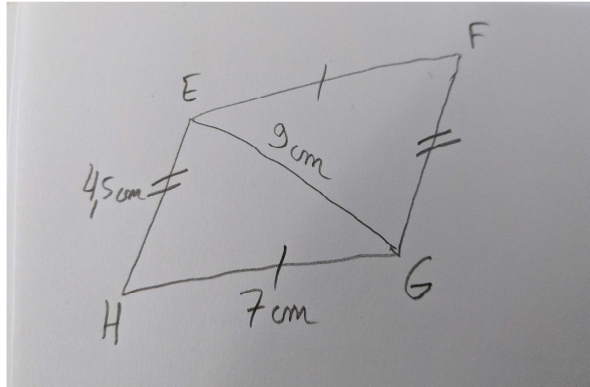


Cette méthode fonctionne pour n'importe quel parallélogramme à partir du moment où vous avez déjà trois sommets.

Exemple :

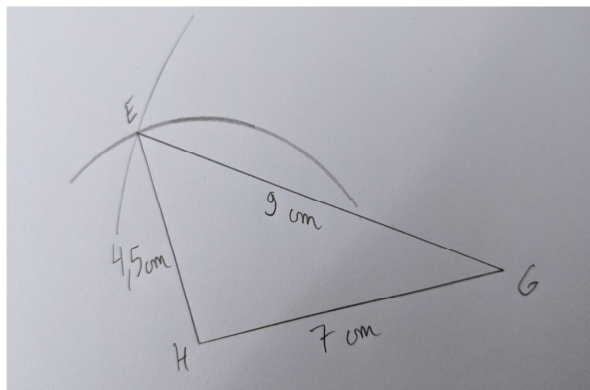
Construire un parallélogramme EFGH tel que

On commence par faire un dessin à main levée :

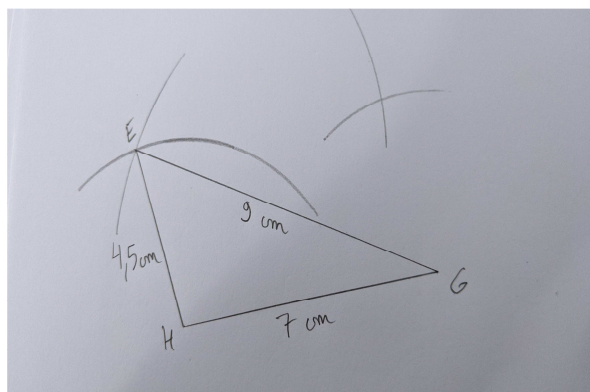


On remarque qu'on connaît deux côtés et une diagonale. Ce sont les seules informations qu'on connaisse.

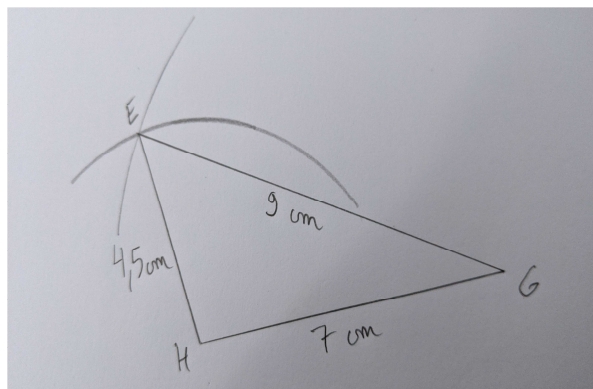
On construit le triangle EHG à l'aide du compas (on aurait pu aussi construire le triangle EFG) :



En utilisant la technique utilisée précédemment pour compléter un parallélogramme quand on a déjà trois sommets sur 4, on trouve l'emplacement du quatrième sommet au compas :



On complète le dessin et on obtient le parallélogramme demandé :



VI. Quelques conseils et remarques :

- Pensez à toujours faire des dessins à main levée pour comprendre ce que vous devez faire. Attention : un dessin à main levée sans points ni indications de longueurs ou d'angles etc. ne vous servira à rien du tout.
- Les constructions demandent de la logique, mais elles nécessitent aussi que vous connaissiez bien les définitions et les propriétés des figures de base.
- L'utilisation d'un équerre pose souvent problème : bien se souvenir qu'un équerre doit être plaquée contre la droite par rapport à laquelle vous voulez faire un angle droit !
- Le rapporteur pose souvent de gros soucis aussi... Pensez à vous entraîner à mesurer des angles si vous avez du mal ! Attention aussi au sens de lecture des graduations... Pour éviter certaines erreurs : un angle aigu doit être plus petit que 90° et un angle obtus plus grand...
- Essayez de faire des dessins soignés et propres. Pensez aussi à les annoter (nommer les points, coder les angles, etc.)

I. Justifier et démontrer...

Souvent on vous posera une question en exercice du style « Montrer que... » ou « Est-ce que... » ou « Que peut-on dire de... »

Parfois la réponse à une question de ce style peut simplement être calculatoire.

Par exemple :

Si on vous demande « Montrer que $\frac{28}{16} + \frac{1}{4}$ est un nombre entier », il suffit juste d'effectuer le calcul pour montrer qu'on obtient un nombre entier :

$$\frac{28}{16} + \frac{1}{4} = \frac{28}{16} + \frac{4}{16} = \frac{32}{16} = \underline{2}$$

Et on obtient bien un nombre entier et donc on a répondu à la question.

Mais parfois, il va falloir « démontrer », c'est à dire utiliser un raisonnement logique faisant intervenir des propriétés connues et des résultats donnés dans l'énoncé ou déjà démontrés lors des questions précédentes.

Il n'y a que lorsqu'il est précisé dans la question « Sans justifier » que vous n'avez rien à expliquer.

Erreurs à ne pas faire :

- « Le triangle est-il rectangle ? » ou « La droite (d) est-elle parallèle à (d') ? »

Réponse : « oui » ou « oui parce qu'on le voit sur le dessin »

Alors on en voit souvent des réponses comme celles-ci.

La première n'explique rien et la seconde ne justifie rien : ce n'est pas parce que vous voyez quelque chose sur votre dessin que cela explique quelque chose...

Si on vous demande juste de vérifier sur votre dessin alors là oui on vérifie, mais sinon on raisonne on démontre !

- « Expliquer pourquoi le quadrilatère ABCD est un carré »

Réponse : « Le quadrilatère ABCD est un carré car il a quatre angles droits et ses diagonales sont perpendiculaires et elles sont de même longueur et elles se coupent en leur milieu et ses côtés sont égaux. »

Même si ce qui est écrit, en gros, dans cette réponse n'est pas forcément faux (un carré a bien 4 angles droits et des diagonales perpendiculaires de même longueur etc.) cette réponse n'explique rien !

Il ne faut pas confondre « démontrer » et « balancer tout ce qu'on sait pour sortir sa science. » Une démonstration suit un certain ordre et utilise correctement les propriétés ou les résultats déjà connus.

II. Bien comprendre les questions...

Bien comprendre les questions posées est essentiel. Il faut bien lire pour comprendre le sens de la phrase.

Exemple 1 :

Voici deux phrases dont on vous demande de répondre par « vraie » ou « faux » et d'expliquer :

- « Tout nombre premier est impair. »
- « Tout nombre impair est premier. »

Elles ne sont pas du tout équivalentes !

Dans la première il faut comprendre : « Est-ce que si on prend un nombre premier il est forcément impair ? »

Dans la seconde il faut comprendre : « Est-ce que si on prend un nombre impair il est forcément premier ? »

Exemple 2 :

Regardons ces deux phrases :

- « Un rectangle est un carré »
- « Un carré est un rectangle »

Comme pour l'exemple 1, ces deux phrases ne signifient pas la même chose !

Dans la première il faut comprendre « Est-ce que si on prend un rectangle au hasard il s'agit forcément d'un carré ? »

Dans la seconde : « Est-ce que si on prend un carré il s'agit forcément d'un rectangle ? »

(Et ici on répond « non » à la première et « oui » à la seconde en plus...)

III. Démonstrations, exemples et contre exemples :

On pense souvent, à tort, que pour expliquer quelque chose il suffit de donner un exemple...

Exemple 1:

Si vous devez répondre par oui ou par non, et expliquer, à cette phrase :

« Tous les parallélogrammes ont les diagonales perpendiculaires »

Et que vous répondez :

« Oui. Le losange est un parallélogramme et il a ses diagonales perpendiculaires. »

Et bien c'est faux !

Le losange est bien un parallélogramme et il a bien ses diagonales perpendiculaires, mais si vous aviez pris un rectangle, qui est aussi un parallélogramme, les diagonales n'auraient pas été perpendiculaires...

C'est comme si on vous demandait « Est-ce que toutes les voitures sont des Ferrari ? » Alors les Ferrari sont bien des voitures, c'est clair qu'ils ne font pas d'aspirateurs chez Ferrari hein, mais il existe aussi des voitures qui ne sont pas des Ferrari... Comme celles de mes collègues, parce que moi j'ai une Ferrari nanananère !

Exemple 2 :

Question : « Tous les nombres impairs ne sont pas divisibles par 2. »

Réponse : « Oui c'est vrai. 1 est impair et n'est pas divisible par 2. 3 est impair et n'est pas divisible par 2. Etc. »

Alors là votre réponse « oui » est correcte mais le raisonnement n'est pas bon !

On ne peut pas dire que c'est vrai ici on donnant un exemple ! Pourquoi ? Et bien vous avez vu le « etc. » dans la réponse ? Si on a mis ça c'est parce qu'on n'allait pas écrire ça pour tous les nombres impairs. Et c'est là le problème : ce n'est pas parce que quelque chose est vraie pour quelques exemples que cela explique pourquoi tous les exemples seraient vrais...

Et ici il faudra donc donner un raisonnement pour justifier que c'est vrai.

Exemple 3 :

Question : « Tous les nombres premiers sont impairs. »

Réponse : « Non. 2 est un nombre premier est il est pair. »

Alors là la réponse est correcte ! On a pourtant donné un exemple allez vous me dire en me lançant des parpaings à la tête !

Oui, on a bien donné un exemple mais il s'agit d'un exemple utilisé pour montrer que la phrase est fausse !

En français on dit qu'on a donné un « contre exemple »...

Résumé des deux exemples précédents :

- Pour montrer qu'une phrase (ou propriété) est vraie on ne peut pas donner un exemple car cela n'explique pas pourquoi quelque chose est vrai dans tous les cas.
- Pour montrer qu'une phrase (ou propriété) est fausse, un seul contre exemple suffit : si il existe un cas pour lequel la phrase est fausse cela prouve bien qu'elle n'est pas tout le temps vraie...

Exemple 4 :

Question : « La somme de deux nombres pairs est pair. »

Réponse : ...

Alors ici on réfléchit dans sa tête (pas dans la mienne il y a déjà bien assez de monde comme ça !) : on essaie avec quelques exemples dans sa tête et on voit que cela semble vrai : $2 + 4 = 6$ pair ; $8 + 24 = 32$ pair...

Donc un exemple il ne suffira pas de donner un exemple... On va devoir justifier... Et c'est ce qu'on fait dans la partie suivante...

IV. Comment démontrer ?

Une démonstration est composée de un ou plusieurs « chaînons déductifs ».
Un chaînon déductif se rédige toujours plus ou moins de cette manière :

- On sait que
- On cite une propriété (ou on la nomme) qui utilise comme hypothèses ce que vous avez écrit derrière le « on sait que... » et des résultats déjà démontrés et qui a pour conclusion ce que vous allez mettre derrière le « Donc.. » ci-dessous
- Donc ...

Ce chaînon déductif se termine après le « donc » par soit la réponse à la question posée, soit par un résultat intermédiaire qui vous sert pour la suite.

Remarque :

Parfois la propriété n'a pas besoin d'être donnée ou citée si elle est évidente ou provient d'une définition...

Exemple 1 :

« Démontrer qu'un nombre divisible par 4 est pair. »

Soit un nombre N

(Quand on doit utiliser un nombre quelconque, on le remplace par une lettre... Cette phrase, qu'on utilise aussi, par exemple, pour résoudre des équations, signifie en français « plus simple » : Je choisis un nombre et je l'appelle N

- On sait que N est divisible par 4
- Donc $N = 4 \times K$ avec K nombre entier.

*(Ici on ne cite pas de propriété dans ce chaînon : On sait que le nombre est divisible par 4, donc par définition il s'écrit $4 \times$ un nombre entier...
On continue la démonstration...*

- Donc $N = 2 \times 2 \times k$
- Donc $N = 2 \times L$ avec $L = 2 \times K$ nombre entier
- Donc N est un multiple de 2 et est donc pair.

(Ici la suite de la démonstration se content de conclusion logique. Et la dernière ligne est une façon plus correcte et simple d'écrire :

- *On sait que $N = 2 \times L$ avec L nombre entier*
- *Si un nombre s'écrit $2 \times L$ avec L nombre entier alors c'est un nombre pair*
- *Donc N est pair.*

Exemple 2 :

« Démontrer que la somme de deux nombres pairs est paire. »

(Il s'agit de l'exemple 4 de la partie précédente...)

Soient A et B deux nombres pairs.

- On sait que A et B sont pairs donc on a : $A = 2 \times N$ et $B = 2 \times M$ avec N et M nombres entiers.
- On a donc : $A + B = 2 \times N + 2 \times M$
 $= 2 \times (N + M)$ *(on a utilisé la distributivité : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$)*
 $= 2 \times K$ (avec $K = N + M$ entier)
- Donc A + B est un nombre pair.

Remarque :

Dans les exemples ci-dessus vous voyez que les démonstrations ne concernent pas uniquement la géométrie.

V. Et en géométrie ?

Alors il est clair que la plupart des démonstrations qui vous seront demandées concerneront principalement la géométrie. Donc on va voir dans cette partie uniquement des exemples dans ce domaine.

Par contre tout ce que je vous expliquerai reste valable pour des démonstrations en arithmétique, etc.

Dans beaucoup d'exercices, les différentes questions qu'on vous pose forment la démonstration complète et donc chaque question consiste en fait en un « chaînon déductif. »

Mais parfois, certaines questions nécessitent plus qu'un chaînon déductif pour y répondre.

Petit conseil important !

Même si on ne vous demande pas de faire une construction en vrai, à l'aide des instruments, pensez à faire un dessin à main levée en le codant en suivant l'énoncé au fur et à mesure. Pensez aussi à le faire si la figure est déjà donnée dans l'énoncé.

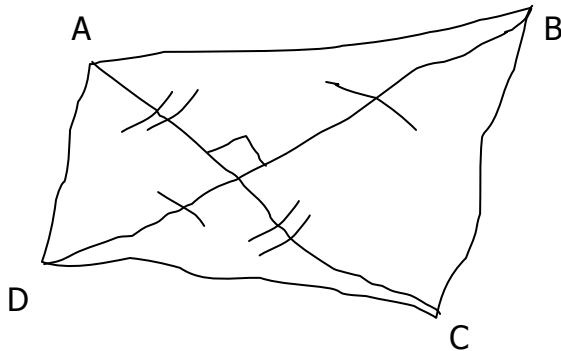
Deuxième conseil important !

Lorsque vous essayez de démontrer un résultat, il faut faire un raisonnement « à l'envers. » Vous devez raisonner ainsi :

« Je dois démontrer ce truc. Pour le démontrer il faudrait que j'ai ça et ça comme informations. Mais je ne les ai pas. Donc comment faire pour trouver ça et ça. » Etc. Il va sans dire qu'il faut bien connaître les propriétés avant de raisonner... Sinon vous ne saurez jamais ce qu'il vous faut comme résultats pour aller au bout de votre démonstration...

Exemple 1 :

Sur cette figure réalisée à main levée, on sait que $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu et qu'ils sont perpendiculaires.



Démontrer que $AB = AD$:

(Raisonnement à l'envers : On doit montrer que $AB=DC$, c'est à dire que ce quadrilatère a deux côtés consécutifs égaux...

Peut-être qu'il s'agit d'un quadrilatère particulier. On sait qu'un losange a ses côtés égaux, donc essayons de montrer que c'est un losange... Et comme on connaît ses propriétés on voit qu'on a tout ce qu'il faut pour que ça soit un losange...

Cette démonstration se fait en deux chaînons déductifs : un pour montrer qu'on a un losange et l'autre pour utiliser la propriété du losange qui va nous servir...)

- On sait que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.
- Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu, alors c'est un losange.
- Donc ABCD est un losange.

(Ici on écrit normalement On sait que ABCD est un losange pour utiliser la propriété ci-dessous. Mais comme on l'a déjà écrit juste avant on ne va pas se répéter...)

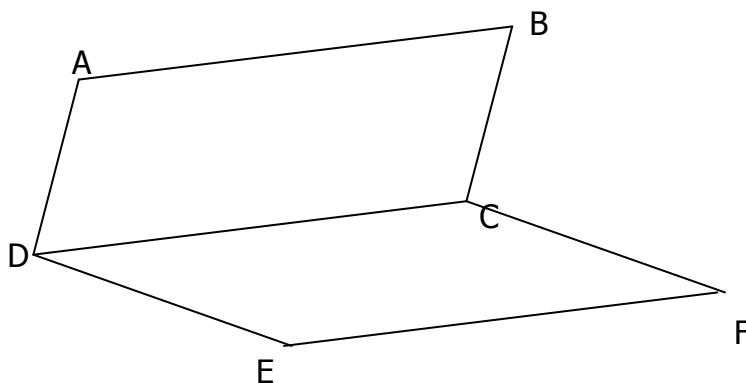
- Si un quadrilatère est un losange alors ses côtés sont tous égaux.
- Donc $AB = AD$.

Exemple 2 :

Soient ABCD et CDEF deux parallélogrammes.

Les droites (AB) et (EF) sont-elles toujours parallèles quels que soient les parallélogrammes choisis au départ ? (Faire une figure à main levée pour voir.)

(Comme l'énoncé l'indique, mais même sans ça vous y auriez penser j'en suis sûr, faisons un dessin à main levée qui respecte quand même un peu l'énoncé...)



(Lorsqu'on fait le dessin correctement, à peu près, on se rend compte qu'on a bien $(AB) \parallel (EF)$ donc on peut se dire que ça doit être vrai ce qu'on doit montrer...)

(On a pas beaucoup d'informations au départ... Puisque on nous demande si des droites sont parallèles et qu'on a des parallélogrammes... ça doit fait tilt dans votre tête qu'il faut utiliser les côtés opposés parallèles du parallélogramme...)

- On sait que ABCD est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Donc $(AB) \parallel (CD)$

- On sait que DCEF est un parallélogramme.
- Donc $(CD) \parallel (EF)$

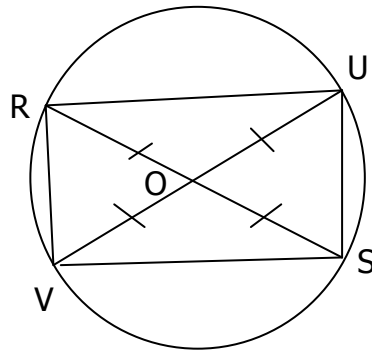
(On a utilisé la même propriété qu'avant donc on ne vas pas la redire encore une fois...)

- On sait que $(AB) \parallel (CD)$ et $(EF) \parallel (CD)$
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles.
- Donc $(EF) \parallel (AB)$

Exemple 3 :

Soient un cercle de centre O et $[RS]$ et $[UV]$ deux de ses diamètres.
Quelle est la nature du quadrilatère $RUSV$?

(Allez, on commence par faire un petit dessin et on le code...)



(Si le dessin est à peu près fait correctement, il semble que $RUSV$ est un rectangle... Avec les codages, si on connaît ses propriétés, il est évident que c'en est non ?)

- On sait que $[RS]$ et $[UV]$ sont deux diamètres du cercle de centre O .
- Donc $[RS]$ et $[UV]$ ont le même milieu et la même longueur.
- Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu et de même longueur, alors c'est un rectangle.
- Donc $RUSV$ est un rectangle

Quelques conseils en géométrie :

Lorsque vous faites votre dessin à main levée, respectez bien l'énoncé : si on vous parle d'un parallélogramme ne faites pas un rectangle ou un carré, car sinon vous allez vous imaginer des choses... Si on vous demande un triangle, ne faites pas un triangle rectangle ou équilatéral... Si on vous demande de placer 3 points quelconques, ne les placez pas alignés si on ne vous le demande pas.

Retenez bien les propriétés... Plus vous les verrez plus vous les retiendrez... Sinon vous n'y arriverez jamais et vous écrirez des démonstrations qui ne seront que du blabla...

Faites tout le raisonnement dans votre tête si besoin avant de rédiger. Trouvez le cheminement et rédigez « à l'envers » comme je vous l'ai expliqué...

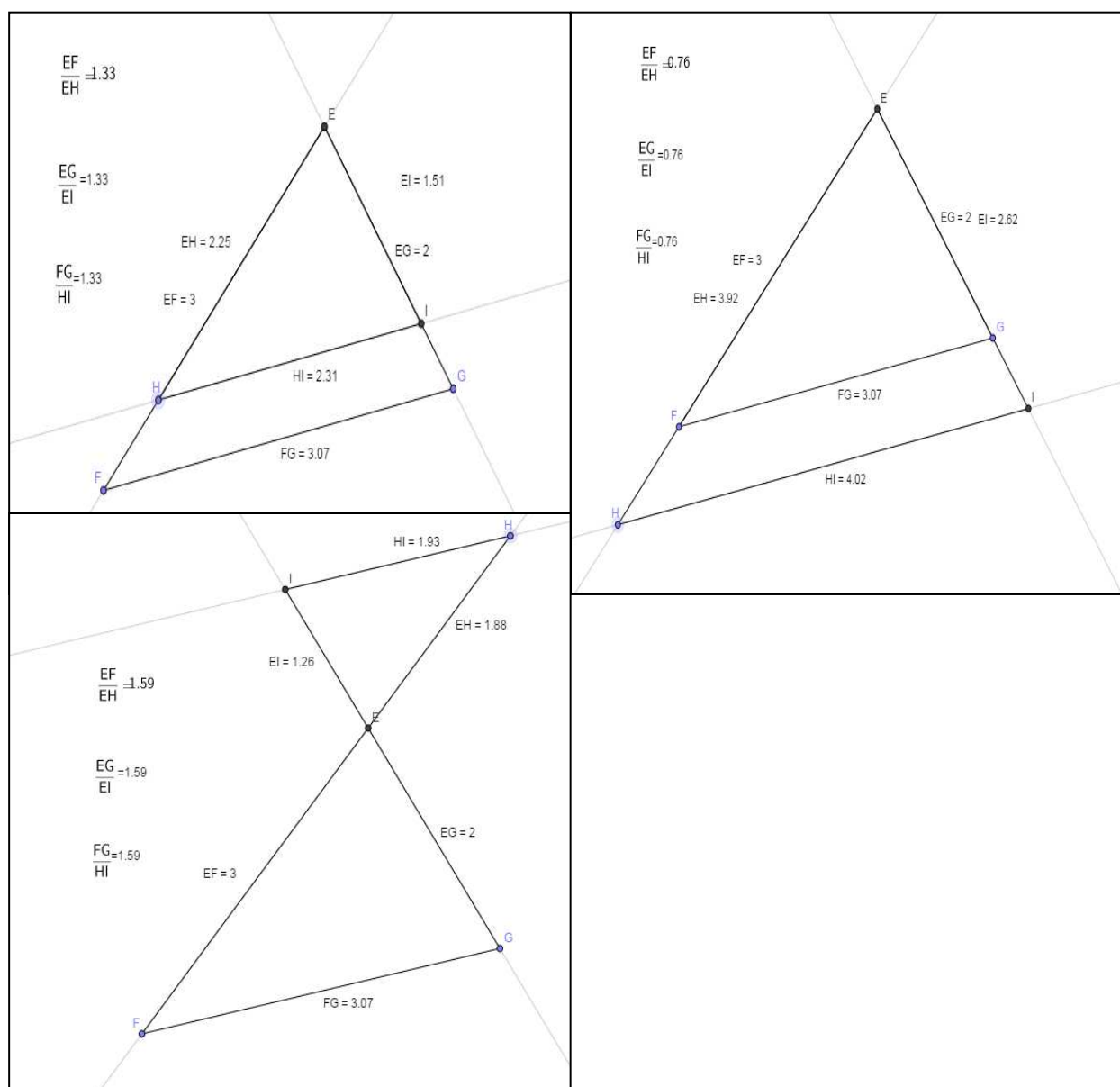
37-

LE THEOREME DE THALES & SA RECIPROQUE

I. Le théorème de Thalès :

Introduction :

On considère les 3 constructions ci-dessous :



Sur ces 3 figures, on a à chaque fois :

- Les points E, F et H sont alignés
- Les points E, G et I sont alignés
- La droite (HI) est parallèle à la droite (GF)

Si vous êtes observateurs, vous remarquerez qu'on distingue à chaque fois deux triangles. Et l'un des deux triangles est une réduction de l'autre triangle. Donc les côtés correspondants des deux triangles sont proportionnels et ces deux triangles sont donc semblables (voir le chapitre correspondant si besoin), et donc :

Si on prend un des côtés du triangle EFG et qu'on compare sa longueur à son côté correspondant dans le triangle EHI, on remarque qu'on obtient le même rapport.

(Ces rapports sont calculés à gauche de chacun des 3 dessins précédents. Vous pouvez voir que pour chaque dessin ces rapports sont bien égaux.)

On en déduit le théorème de Thalès :

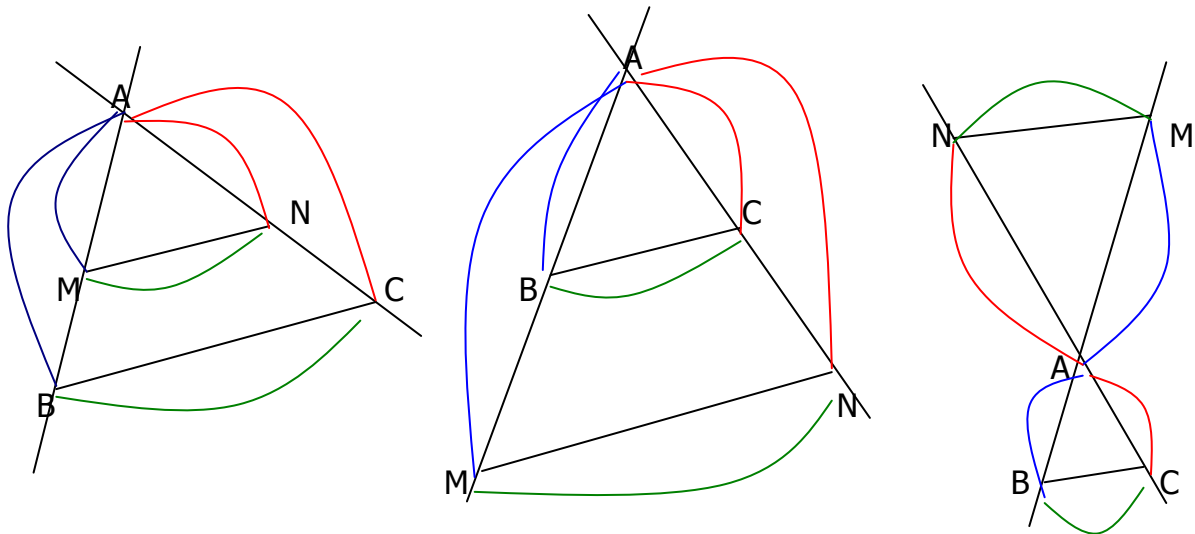
Théorème de Thalès :

Si on a :

- trois points A, B et M alignés et distincts
- trois points A, C et N alignés et distincts
- (BC) // (MN)

alors on a l'égalité : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Autrement dit :



Pour chaque dessin, si les droites (MN) et (BC) sont parallèles on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

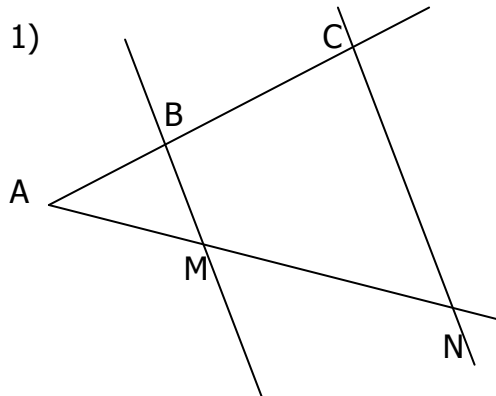
Pour ne pas se tromper dans les longueurs utilisées dans les fractions données, bien retenir que :

- On ne prend que des longueurs qui correspondent à des côtés des deux triangles utilisés. (Par exemple ici on ne peut avoir NC ou BM dans les fractions !)
- On repère les côtés correspondants pour savoir ce qu'on doit mettre dans la fraction : ce sont les côtés qui sont dans le même prolongement ou qui sont parallèles (sur le dessin précédent, du bleu avec du bleu, du rouge avec du rouge, du vert avec du vert.)

- Ne pas inverser une fraction en cours de route ! Soit on fait petit côté sur grand côté correspondant pour chaque fraction, soit grand côté sur petit côté correspondant (ou côté du triangle du haut sur côté correspondant du triangle du bas), etc.

Exercice 1 :

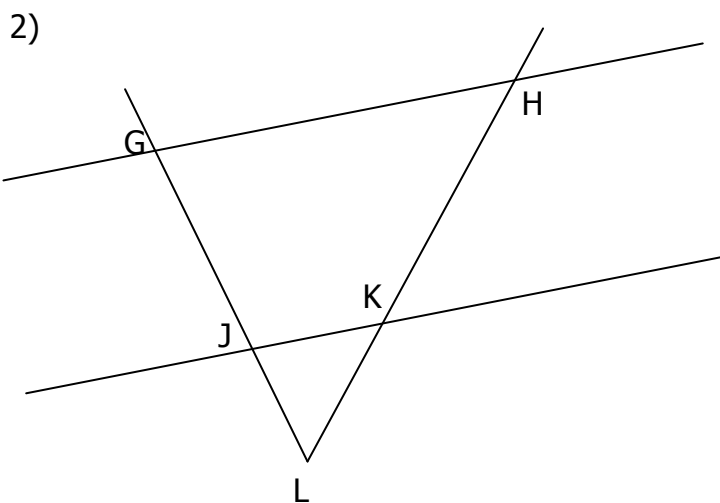
Compléter les égalités ci-dessous en utilisant le théorème de Thales :



Si $(BD) \parallel (CE)$

alors on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{NC}$$



Si $(GH) \parallel (JK)$

alors on a :

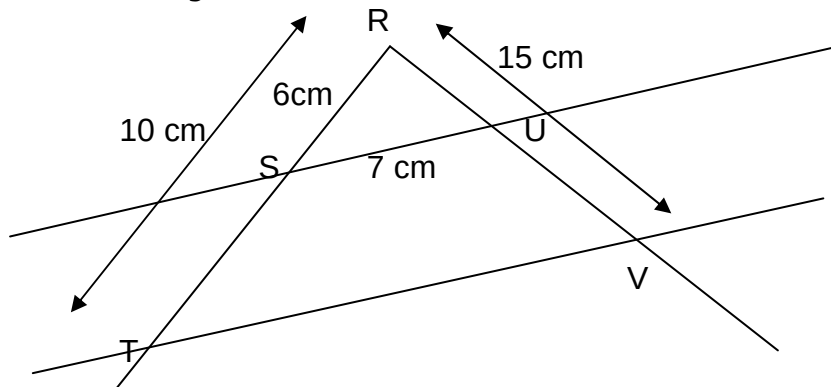
$$\frac{LG}{LJ} = \frac{LH}{LK} = \frac{GH}{JK}$$

II. Utiliser le théorème de Thalès pour déterminer une longueur :

Le théorème de Thalès permet de calculer des longueurs lorsqu'on se retrouve dans une telle configuration de dessin. Pour pouvoir utiliser le théorème il faut connaître un côté d'un des triangles et le côté correspondant à celui-ci dans l'autre triangle.

Exemple 1 :

On considère cette figure :



Sur cette figure on suppose que $(RU) \parallel (TV)$, que $RS = 6 \text{ cm}$, $RT = 10 \text{ cm}$, $SU = 7 \text{ cm}$ et $RV = 15 \text{ cm}$.

Déterminer RU et TV :

(Ici on doit reconnaître une « configuration » de Thalès : un grand triangle coupé par une droite parallèle à un de ses cotés qui permet d'obtenir une réduction de ce triangle.

On sait que :

- R, S et T sont alignés et distincts
- R, U et V sont alignés et distincts
- $(SU) \parallel (TV)$

Donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{RS}{RT} = \frac{RU}{UV} = \frac{SU}{TV}$

(On remplace dans ces 3 fractions les mesures que l'on connaît)

Donc : $\frac{6}{10} = \frac{RU}{15} = \frac{7}{TV}$

(Pour trouver une longueur demandée, on repère une fraction avec la longueur cherchée, ou permettant de trouver celle demandée, et une fraction complète : on en a forcément une parmi les 3. Une fois nos deux fractions choisies, ce n'est que du calcul et on utilise les mêmes méthodes que pour résoudre une équation...)

On cherche RU :

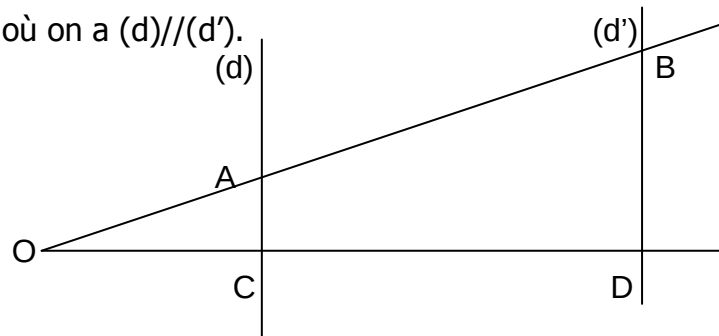
$$\text{On a : } \frac{RU}{15} = \frac{6}{10} \text{ donc } RU = \frac{6}{10} \times 15 = \frac{90}{10} = \mathbf{9 \text{ (cm)}}$$

On cherche TV :

$$\text{On a : } \frac{7}{TV} = \frac{6}{10} \text{ donc } \frac{TV}{7} = \frac{10}{6} \text{ donc } TV = \frac{10}{6} \times 7 = \frac{70}{6} \approx \mathbf{11,7 \text{ (cm)}}$$

Exemple 2 :

On considère la figure suivante où on a $(d) \parallel (d')$.



On donne : $OC = 4 \text{ cm}$, $OD = 20 \text{ cm}$, $OA = 6 \text{ cm}$ et $BD = 7 \text{ cm}$.

Le but de l'exercice est de déterminer OB et AC.

On sait que :

- les points O, A et B sont alignés et distincts
- les points O, C et D sont alignés et distincts
- les droites (AC) et (DB) sont parallèles.

Donc par le théorème de Thalès on a :

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OB} &= \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} \\ \text{donc } \frac{6}{OB} &= \frac{4}{20} = \frac{AC}{7} \end{aligned}$$

- On cherche OB :

$$\text{On sait que } \frac{6}{OB} = \frac{4}{20}$$

$$\text{Donc } \frac{OB}{6} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{d'où } OB = 6 \times 5 = \mathbf{30 \text{ (cm)}}$$

- On cherche AC :

$$\text{On sait que } \frac{AC}{7} = \frac{4}{20}$$

$$\text{Donc } AC = 7 \times \frac{4}{20}$$

$$\text{d'où } AC = \frac{28}{20} = \mathbf{1,4 \text{ (cm)}}$$

III. La contraposée du théorème de Thalès :

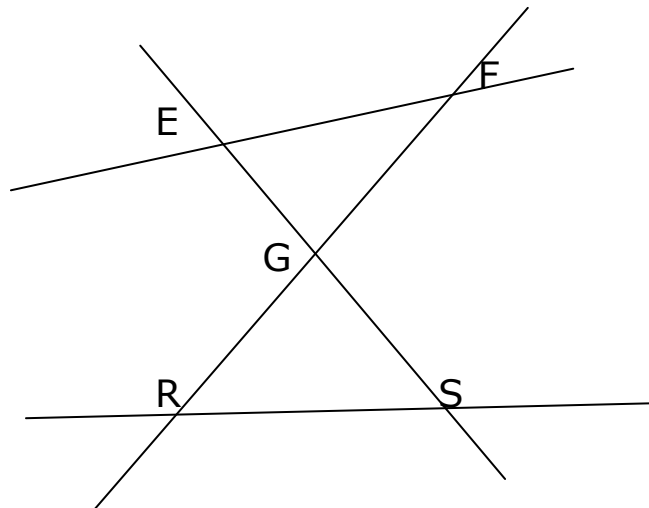
On énonce la contraposée de Thalès (qui découle directement du théorème de Thalès) et qui se comprend simplement ainsi : « si les quotients ne sont pas égaux alors les droites ne sont pas parallèles. »

Si on a :

- Trois points A, B et M sont alignés et distincts
- Trois points A, C et N sont alignés et distincts

Alors si au moins deux des quotients $\frac{AB}{AM}$, $\frac{AC}{AN}$ et $\frac{BC}{MN}$ ne sont pas égaux, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Exemple :



Sur cette figure on donne $EG = 4$ cm, $GS = 5$ cm, $GF = 6$ cm et $GR = 8$ cm.

Que peut-on dire de (EF) et (RS) ?

On sait que :

- Les points E, G et S sont alignés et distincts.
- Les points F, G et R sont alignés et distincts.

On a : $\frac{EG}{GS} = \frac{4}{5} = 0,8$ et $\frac{FG}{GR} = \frac{6}{8} = 0,75$

Donc $\frac{EG}{GS} \neq \frac{FG}{GR}$

Donc par la contraposée du théorème de Thalès, **les droites (EF) et (RS) ne sont pas parallèles.**

Remarque :

la contraposée du théorème de Thalès permet donc de montrer que des droites ne sont pas parallèles.

IV. La réciproque du théorème de Thalès :

La réciproque du théorème de Thalès va permettre de montrer que deux droites sont parallèles.

On se doute puisqu'on parle de réciproque, qu'il va falloir montrer que des quotients sont égaux pour avoir des droites parallèles.

Néanmoins pour le montrer il faudra que les quotients soient égaux mais il faudra aussi une condition en plus, une condition qui porte sur l'ordre des points. Pour comprendre pourquoi il faut cette condition il faut lire la partie suivante de ce chapitre. En attendant, vous pouvez voir comment on rédige.

Réciproque du théorème de Thalès :

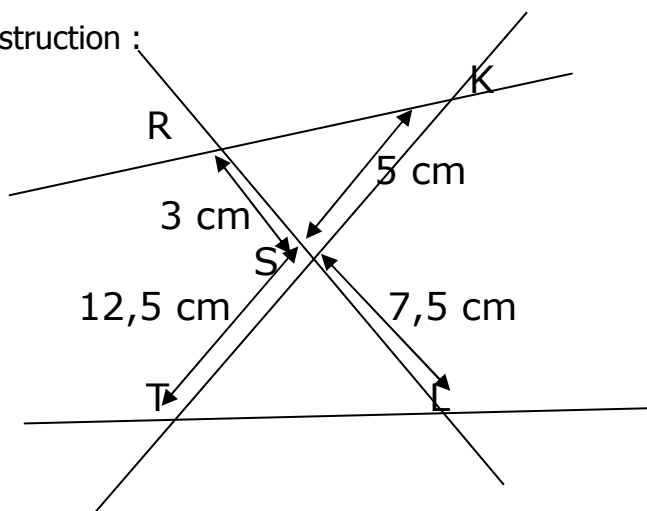
Si on a :

- trois points A, B et M alignés et distincts
- trois points A, C et N alignés et distincts

Alors si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ et si les points A, B et M sont dans le même ordre que les points A, C et N alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple :

On considère cette construction :



Démontrer que les droites (RK) et (TL) sont parallèles :

On sait que :

- les points R, S et L sont alignés et distincts
- les points K, S et T sont alignés et distincts

$$\text{On a : } \frac{RS}{SL} = \frac{3}{12,5} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{KS}{ST} = \frac{5}{12,5} = \frac{2}{5}$$

(Si on n'a pas d'écriture exacte des fractions il faut éviter de prendre des arrondis des écritures décimales pour montrer qu'elles sont égales, sinon vous risquez de conclure le contraire de ce qu'on doit obtenir...)

Donc $\frac{RS}{SL} = \frac{KS}{ST}$

Comme les points R, S et L sont dans le même ordre que les points K, S et T alors par la réciproque du théorème de Thalès les droites (RK) et (TL) sont parallèles.

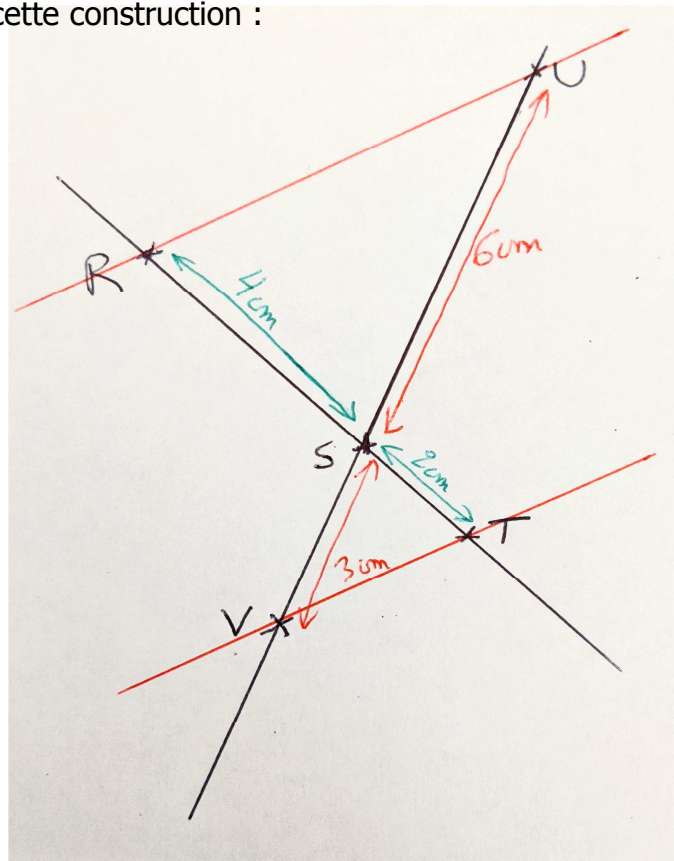
Et vous voyez qu'il faut ajouter cette histoire d'ordre avant de conclure. Retenez juste qu'il faut ajouter ce petit bout en gras avant de citer la réciproque. Pour comprendre pourquoi, il suffit de lire ce qui vient dans la partie suivante...

Remarque :

Comme pour la réciproque du théorème de Pythagore et la contraposée on remarque que la rédaction dans les deux cas est quasi similaire. C'est normal puisqu'on ne sait pas si les droites vont être parallèles ou non. Seule la conclusion diffère.

V. C'est quoi cette histoire d'ordre dans la réciproque ?

Alors, regardons cette construction :



On a :

- Les points R, S et T sont alignés et distincts
- Les points U, S et V sont alignés et distincts
- On a : $\frac{RS}{ST} = \frac{4}{2} = 2$ et $\frac{SU}{SV} = \frac{6}{3} = 2$, c'est à dire $\frac{RS}{ST} = \frac{SU}{SV}$

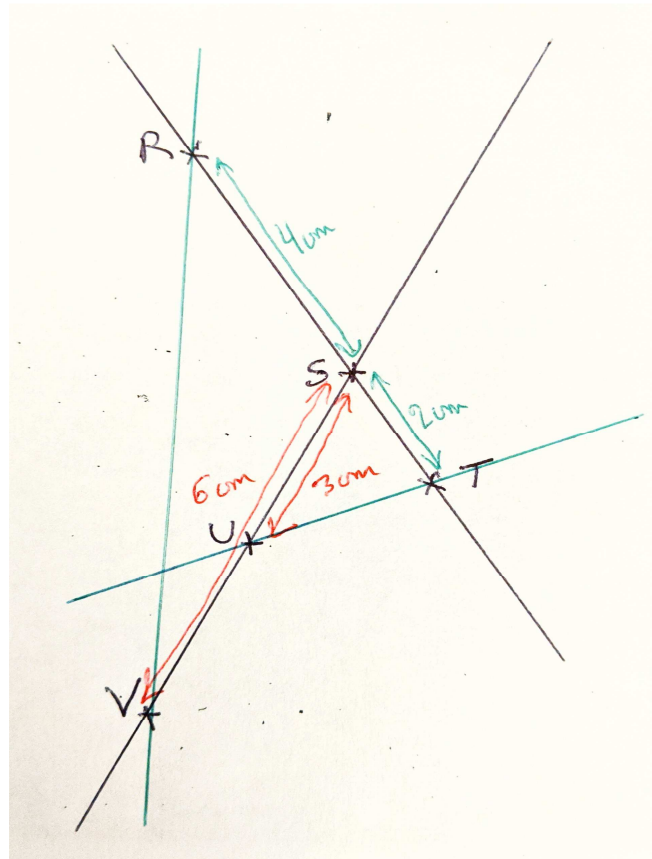
Et on remarque qu'on a bien les droites (RU) et (VT) parallèles.

Donc les quotients égaux et les points alignés « semblent » bien suffire pour que les droites soient parallèles.

Et pourtant...

Je vous montre ci-dessous une construction ayant exactement les mêmes hypothèses que pour la figure précédente, et vous allez voir que les deux droites ne seront pas, mais alors pas du tout parallèles.

Regardez :



Alors pourquoi ? Qu'est ce qui fait que cela ne fonctionne pas ici ?

Et bien comparons les deux constructions.

Dans les deux cas, le point commun aux deux séries de points alignés est S.

Sur la première construction, le point S est « entre » R et T, et il est aussi « entre » U et V.

Sur la seconde construction, le point S est toujours « entre » R et T mais il n'est plus « entre » U et V !

Voilà d'où vient le problème : l'ordre des points n'est pas correct, il n'est pas respecté.

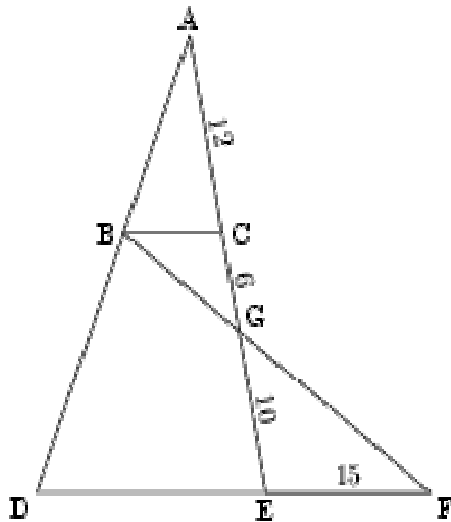
Pour que cela fonctionne, le point commun aux deux alignements doit être :

- Soit entre les deux autres points pour les deux alignements*
- Soit ne pas être entre les deux autres points pour les deux alignements*

Concrètement, vous ne vous poserez jamais de questions car sur le dessin ci-dessus on comprend de suite que les droites vertes ne peuvent pas être parallèles, mais il faudra toujours ajouter ce bout de phrase avant de conclure : « comme les points blabla et blaablalab sont dans le même ordre... » (en les donnant bien dans le bon ordre...)

VI. Quelques exercices pour vous faire plaisir !

Exercice 1 :



Sur cette figure on sait que $(BC) \parallel (DF)$.
Déterminer DE :

Solution :

Dans cet exercice on ne peut pas calculer directement DE. Mais, et c'est un « réflexe » qu'il faut avoir dans ce genre d'exercices, on remarque qu'il y a plein de points qui sont en « configuration de Thalès ». Il faut savoir les utiliser intelligemment.

Ici on peut voir qu'on peut utiliser le théorème de Thalès avec les points B, C, G, E et F... et que cela peut nous permettre de trouver BC. Et la longueur BC intervient avec Thalès en prenant les points A, B, C, D et E... Et va nous permettre de trouver DE.

- On sait que :
 - Les points B, G et F sont alignés et distincts.
 - Les points C, G et E sont alignés et distincts.
 - $(BC) \parallel (EF)$ (car $(BC) \parallel (DF)$...)

Donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{BG}{GF} = \frac{CG}{GE} = \frac{BC}{EF}$

$$\text{D'où : } \frac{BG}{GF} = \frac{6}{10} = \frac{BC}{15} \quad \text{d'où } \frac{BC}{15} = 0,6$$

$$\text{d'où } BC = 15 \times 0,6 = \mathbf{9 \text{ (cm)}}$$

- On sait que :
 - Les points A, B et D sont alignés et distincts.
 - Les points A, C et E sont alignés et distincts.
 - $(BC) \parallel (DE)$

Donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

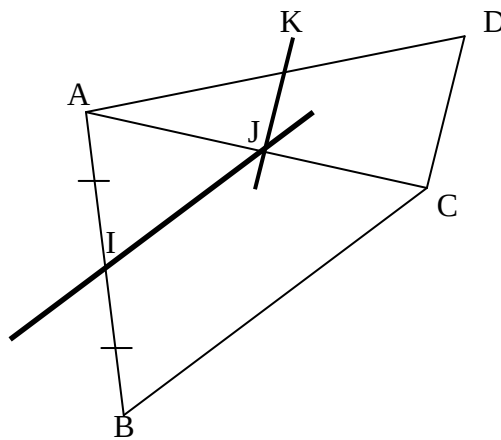
D'où : $\frac{AB}{AD} = \frac{12}{28} = \frac{9}{DE}$

D'où : $\frac{DE}{9} = \frac{28}{12}$

D'où : $DE = \frac{9 \times 28}{12} = \mathbf{21 \text{ (cm)}}$

Exercice 2 :

Sur la figure ci-dessous, I est le milieu de [AB], (IJ) est parallèle à (BC) et (JK) est parallèle à (CD).



Démontrer que K est le milieu de [AD] :

Solution :

On va utiliser du Thalès dans le triangle « du bas » et dans le triangle « du haut » pour arriver au résultat demandé... Encore une fois, on essaie toujours de voir toutes les configurations qu'on peut utiliser...

- On sait que :
 - Les points A, I et B sont alignés et distincts.
 - Les points A, J et C sont alignés et distincts.
 - (IJ) // (BC)

Donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$

D'où : $\frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$ (car $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ puisque I est le milieu de [AB])

D'où J est le milieu de [AC]

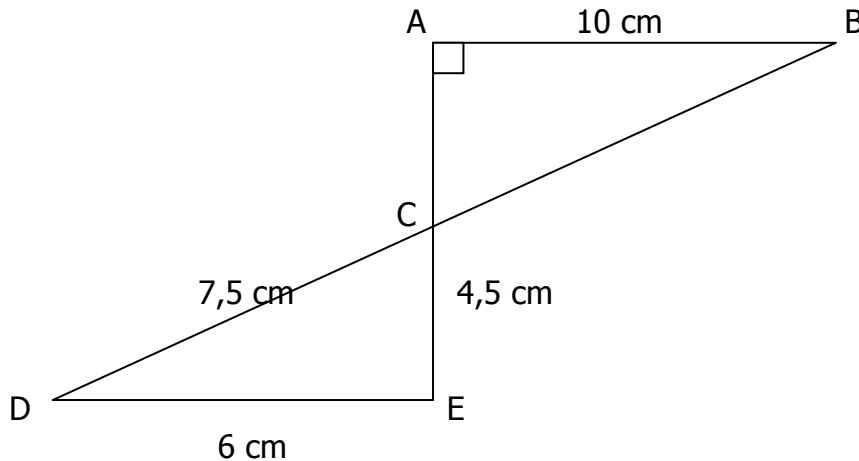
- On sait que :
 - Les points A, J et C sont alignés et distincts.
 - Les points A, K et D sont alignés et distincts.
 - (JK) // (CD)

Donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{AJ}{AC} = \frac{AK}{AD} = \frac{JK}{CD}$

D'où : $\frac{AK}{AD} = \frac{1}{2}$ (car J est le milieu de [AC])

D'où **K est le milieu de [AD].**

Exercice 3 :



Sur cette figure le triangle ABC est rectangle en A, DC = 7,5 cm, CE = 4,5 cm, DE = 6cm et AB = 10 cm.

- 1) Que peut-on dire du triangle CDE ? Justifier.
- 2) Déterminer AC.

Solution :

(Exercice qui fait intervenir d'autres choses importantes en géométrie, et pas que du Thalès...)

1) On sait que dans le triangle DCE le plus grand côté est [DC].

On a : $CD^2 = 7,5^2 = 56,25$

et : $DE^2 + EC^2 = 6^2 + 4,5^2 = 36 + 20,25 = 56,25$

Donc $CD^2 = DE^2 + EC^2$

Donc par la réciproque du théorème de Pythagore **le triangle DCE est rectangle en E.**

2) (On voit bien que le dessin ressemble à une configuration de Thalès, mais pour utiliser le théorème de Thalès, il faut avoir des droites parallèles... Et ça on ne nous le dit pas directement dans l'énoncé... Mais comme il y a toujours une logique dans les exercices, je pense que la question 1) va nous aider...)

On sait que $(DE) \perp (AE)$ car DCE est un triangle rectangle en E.

On sait que $(AB) \perp (AE)$ car ABC est un triangle rectangle en A.

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.

Donc on a : **$(DE) // (AB)$**

On sait que :

- Les points A, C et E sont alignés et distincts
- Les points B, C et D sont alignés et distincts
- $(AB) // (DE)$

Donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{DE}$

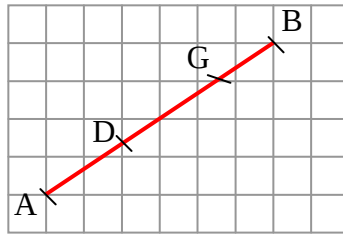
$$\text{D'où : } \frac{AC}{4,5} = \frac{BC}{7,5} = \frac{10}{6}$$

$$\text{D'où : } \frac{AC}{4,5} = \frac{10}{6}$$

$$\text{D'où : } AC = \frac{4,5 \times 10}{6} = \mathbf{7,5 \text{ (cm)}}$$

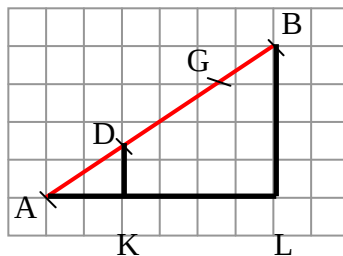
Exercice 4 :

En utilisant le quadrillage, exprimer $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{BG}{BA}$:

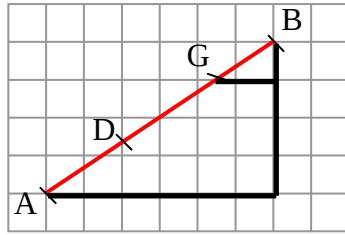


Solution :

Avec les carreaux on peut facilement faire apparaître tout ce qu'il faut pour résoudre cet exercice :



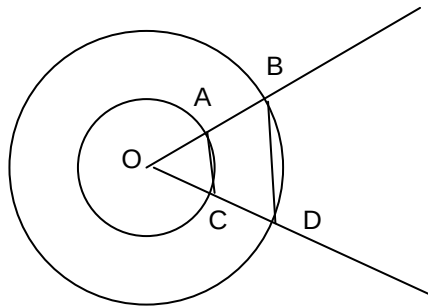
Ici avec le théorème de Thalès on voit que $\frac{AD}{AB} = \frac{AK}{AL} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (En comptant les carreaux)



Et en faisant pareil pour l'autre quotient on trouve : $\frac{BG}{BA} = \frac{1}{4}$

Exercice 5 :

On considère cette figure :



Où on a tracé deux cercles de centre O, deux demi droites d'origines O coupant les deux cercles en A, B (pour la première) et en C et D (pour la seconde.)

Démontrer que ABDC est un trapèze :

Solution :

(On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles...)

On sait que :

- Les points O, A et B sont alignés et distincts
- Les points O, C et D sont alignés et distincts

On a : $\frac{OA}{OB} = \frac{r}{R}$ et $\frac{OC}{OD} = \frac{r}{R}$ (où r et R sont les rayons des deux cercles)

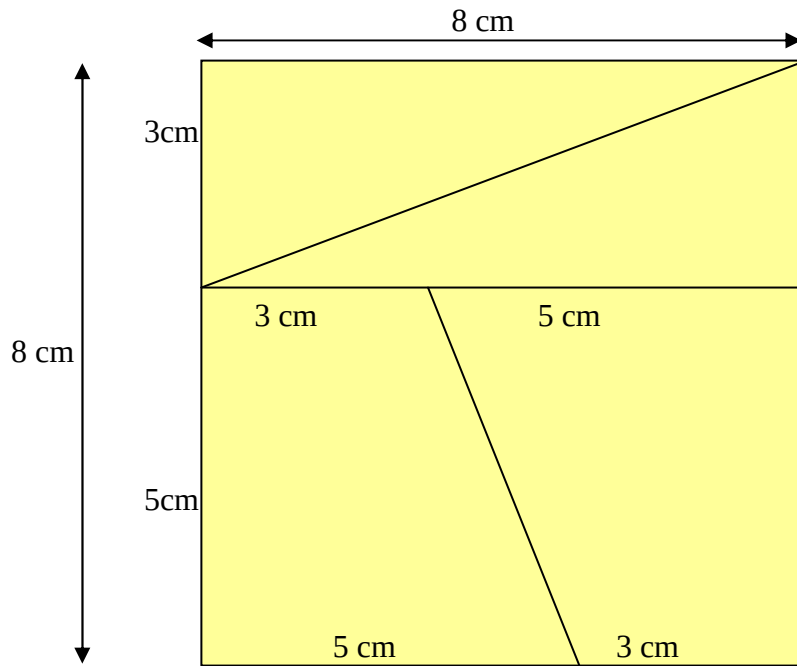
Donc $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$

Comme les points O, A et B sont dans le même ordre que les points O, C et D, alors par la réciproque du théorème de Thalès les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

Donc ABDC a deux côtés parallèles, **c'est donc un trapèze.**

VI. Petit bonus : Comment devenir infiniment riche avec une plaque en or ?

Voici la représentation d'une plaque carrée en Or de côté 8 cm, peu importe son épaisseur. On va la découper en suivant ce découpage :

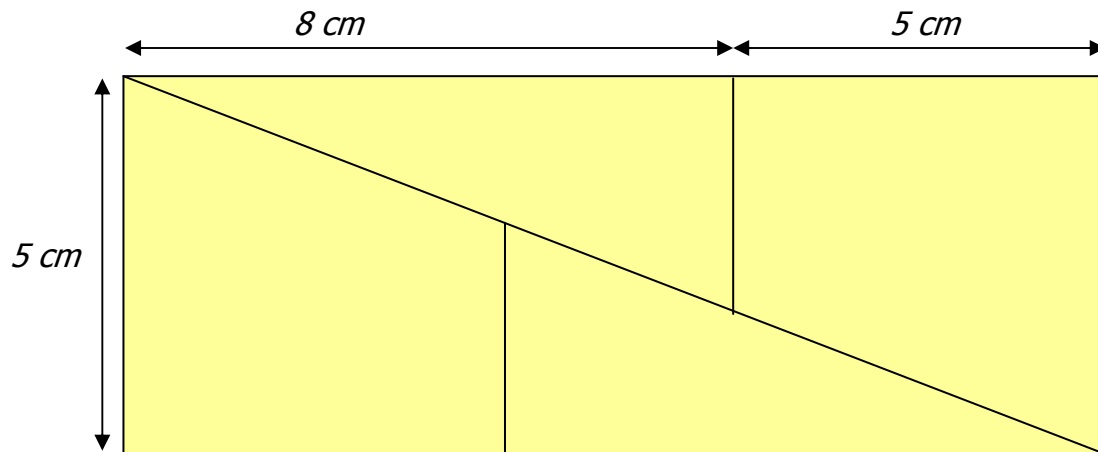


Si on déplace ou tourne les morceaux d'une manière différente, on arrive à reconstituer un rectangle...

(Là généralement les personnes galèrent à créer ce rectangle... Il ne s'agit pourtant que d'un puzzle à 4 pièces...)

Vous pouvez chercher à le faire (si vous avez le temps de dessiner un tel carré et de faire un peu de découpage...) La solution est sur la page suivante...

Donc au bout d'un certain temps (moins de 3h j'espère !) vous arrivez à placer les pièces ainsi :



Et on obtient donc un rectangle de 13 cm de longueur et de 5 cm de largeur...

Et maintenant ?

Et bien au départ on est parti d'un carré de 8 cm de côté... Sa surface était donc de $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$.

Et là on a un rectangle de $13 \times 5 = 65 \text{ cm}^2$...

On a donc gagné 1 cm^2 de surface !

Ce qui veut dire qu'on a gagné un peu d'or en plus !

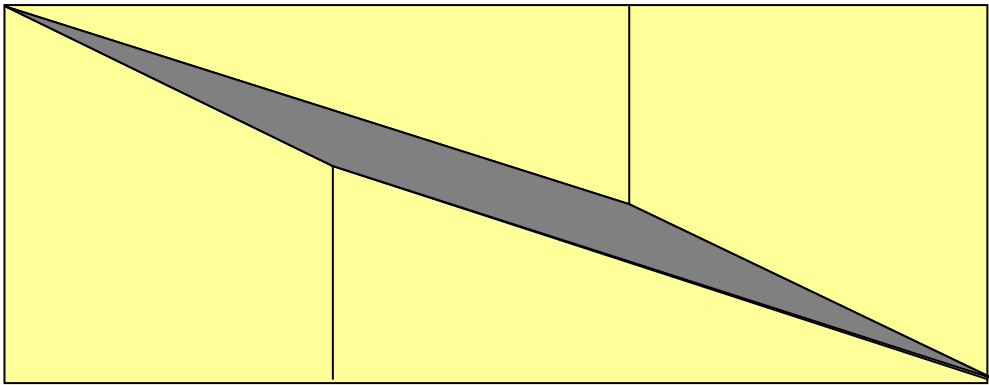
Si on fait fondre notre plaque rectangulaire et qu'on la remet dans un moule de forme carrée, et qu'on découpe ce carré dans les mêmes proportions que pour le premier carré, on va gagner encore un peu d'or en plus en redisant les 4 pièces pour en faire un rectangle...

Continuons comme ça le temps qu'il faudra et on gagnera de plus en plus d'or !

Allez, on arrête de rêver... Ce n'est pas possible sinon ça ferait depuis longtemps que je ne serai plus prof et que je gagnerai ma vie en faisant ça du matin au soir...

Alors d'où vient le problème ? D'où vient ce centimètre carré qui apparaît ?

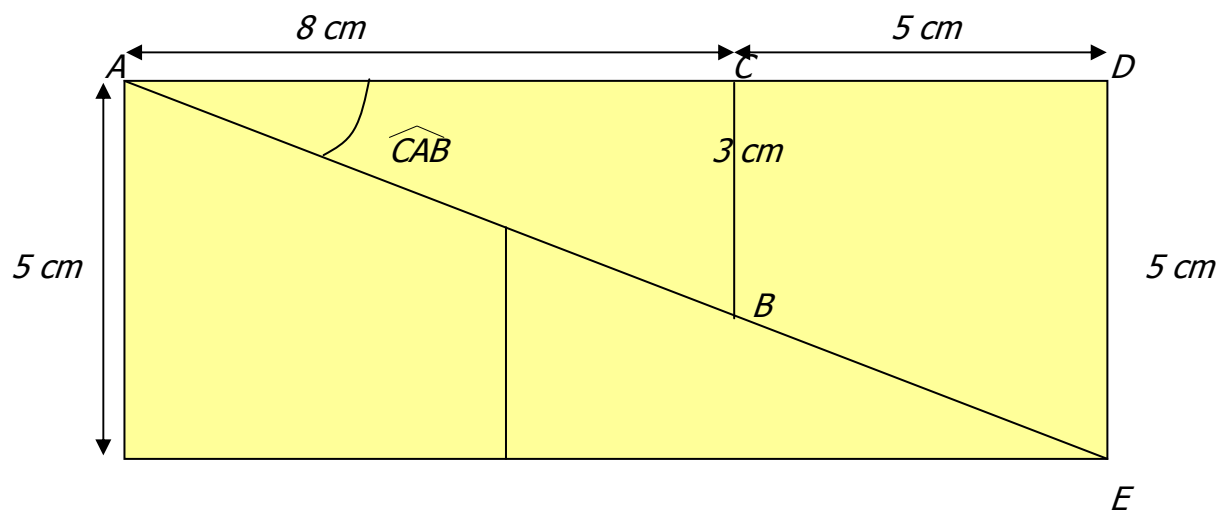
Il y a plusieurs façons de le comprendre mais la première chose à savoir déjà, c'est que vous avez cru voir quelque chose qui n'existe pas... Si vous regardez bien vos 4 morceaux (si vous avez essayé de faire cette expérience), et que vous avez découpé à peu près proprement, vous devez remarquer que votre rectangle ressemble plus à celui que je vous donne sur la page suivante que celui que je vous ai donné avant :



(J'ai exagéré ce qu'on doit observer, mais en fait il y a une partie vide... en grise...)

Alors comment prouver que les deux « grands » triangles rectangles ne sont pas vraiment des triangles et que certains points ne sont pas alignés. Je vous propose deux façons de le voir...

1° méthode :



Si les points A, B et E sont alignés, alors on reconnaît du Thalès (car $(BC) \parallel (DE)$)

On devrait avoir donc : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$

Or : $\frac{AC}{AD} = \frac{8}{13} \approx 0,62$

et : $\frac{BC}{DE} = \frac{3}{5} = 0,6$

Donc les quotients ne sont pas égaux et donc quelque chose cloche. Les points A, B et E ne sont donc pas alignés...

2° méthode :

Si on prend le triangle ABC rectangle en C on a, grâce aux formules trigonométriques : $\tan(\widehat{CAB}) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{8}$

Et donc, grâce à la touche arctan de la calculatrice on trouve : $\widehat{CAB} \approx 20,6^\circ$

Et dans le triangle DAE rectangle en D on a :

$$\tan(\widehat{CAB}) = \frac{DE}{AD} = \frac{5}{13}$$

Et grâce à la touche arctan de la calculatrice on trouve alors : $\widehat{CAB} \approx 21,0^\circ$

On ne retrouve pas le même angle... Donc quelque chose cloche...

Conclusion :

Cet exemple vous montre qu'en géométrie, entre autres, on ne doit jamais se fier à un dessin et dire « ça se voit » car on peut se faire avoir facilement...

38- SYMETRIES AXIALES & SYMETRIES CENTRALES

On aborde dans cette partie les transformations du plan qui permettent à partir d'une figure de base d'obtenir une nouvelle figure en la... transformant... étonnant non ?

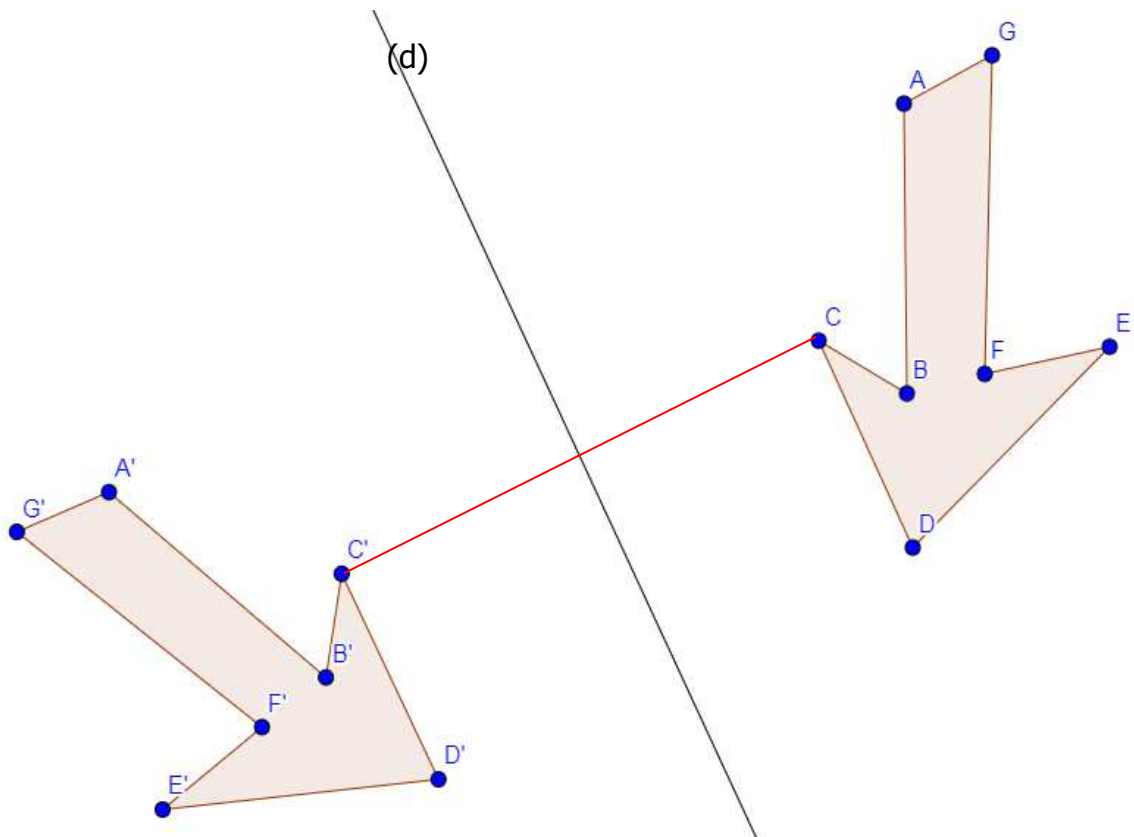
I. Les symétries axiales :

Ce sont les symétries obtenues par pliage. Je suis sûr que vous avez tous fait ça une fois dans votre vie.

1) Définitions et propriétés :

- Deux figures sont symétriques par rapport à une droite (d) si en pliant par rapport à cette droite les deux figures se superposent.
- Une symétrie par rapport à une droite est appelée une symétrie axiale.

Exemple :



Sur cette figure, les polygones FEDCIHG et F'E'D'C'I'H'G' sont symétriques par rapport à la droite (d).

(Si on plie le dessin les deux flèches se superposent...)

On dira aussi (par exemple) :

- Les points E et E' sont symétriques par rapport à la droite (d)
- G' est le symétrique de G par rapport à la droite (d)
- F est le symétrique de F par rapport à la droite (d)
- [C'D'] et [CD] sont symétriques par rapport à la droite (d)
- etc.

On peut aussi remarquer que :

- deux segments symétriques se superposent donc ils ont la même longueur.
- Deux angles symétriques se superposent donc ils ont la même mesure.
- etc.

Ce qui nous donne ces propriétés bien connues :

- La symétrie axiale conserve les longueurs et les périmètres
- La symétrie axiale conserve les mesures d'angles
- La symétrie axiale conserve les formes et les aires (les surfaces)
- La symétrie axiale conserve les milieux

Sur la figure précédente on a tracé le segment [CC'] en rouge. On remarque que la droite (d) passe par le milieu de ce segment et lui est perpendiculaire. Autrement la droite (d) est la médiatrice de ce segment d'extrémités un point et son symétrique. Ce qui nous donne donc cette propriété :

- Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à une droite (d) alors la droite (d) est la médiatrice du segment [MM'].

Remarque :

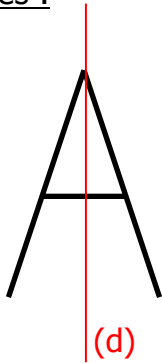
C'est grâce à cette propriété que nous pouvons construire des symétriques à l'aide d'une règle graduée et d'une équerre ou du compas. Lisez la partie « L'art de construire – 2^{ème} partie » pour revoir comment on fait.

2) Axes de symétrie d'une figure géométrique :

- Une droite (d) est un axe de symétrie d'une figure géométrique si en pliant par rapport à cette droite les deux parties de la figure se superposent parfaitement.

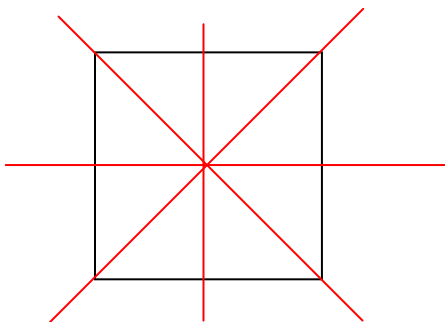
Exemples :

1)



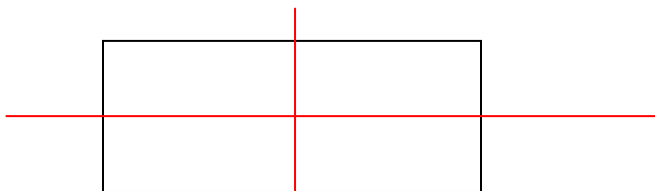
La droite (d) est un axe de symétrie de la lettre A représentée ci-dessus : si on plie en suivant la droite (d) les deux parties de la lettre A se superposent.

2)



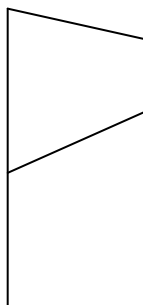
Les 4 droites rouges ci-dessus sont des axes de symétrie du carré. Ils sont concourants.

3)



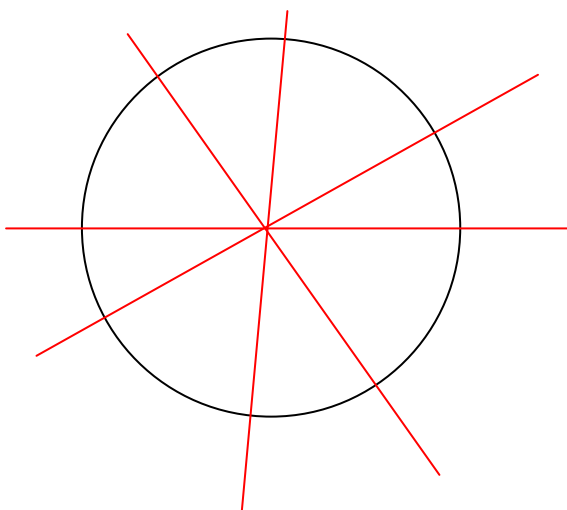
Le rectangle n'a que deux axes de symétrie : les droites passant par les milieux des côtés opposés. *(Et non pas les diagonales ! Essayez de plier une feuille A4 en suivant les diagonales et vous me direz si ça se superpose ou pas.)*

4)



Cette lettre P n'a aucun axe de symétrie.

5)



Le cercle a une infinité d'axes de symétrie : ses diamètres (les droites passant par son centre.)

Remarques :

Une figure géométrique peut donc avoir :

- aucun axe de symétrie
- un seul axe de symétrie
- plusieurs axes de symétrie
- une infinité d'axes de symétrie

Si une figure possède plus d'un axe de symétrie, les axes sont concourants (ils se coupent tous en un même point.)

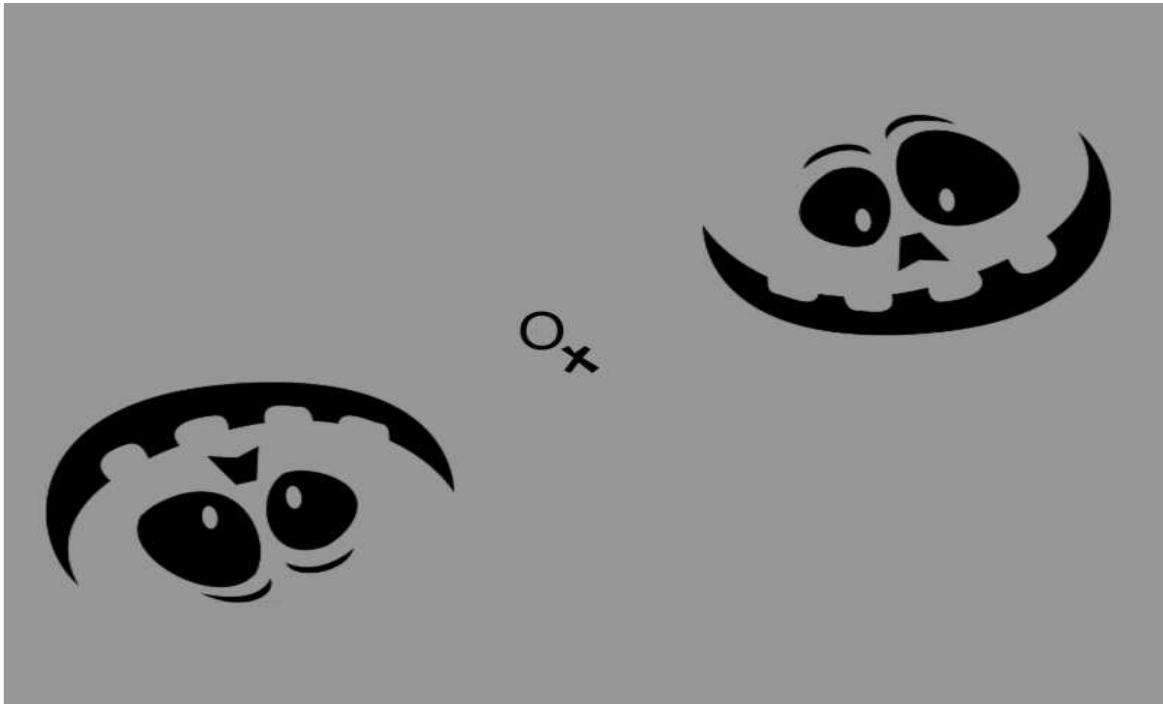
II. Les symétries centrales :

Les symétries centrales sont les symétries par rapport à un point. En fait, il s'agit de demi-tours...

1) Définitions :

- Deux figures géométriques sont symétriques par rapport à un point O si en faisant tourner la première d'un demi tour autour du point O on obtient la seconde.
Le point O est alors appelé le centre de la symétrie.

Exemple :



Sur la figure ci-dessus, on voit deux visages.

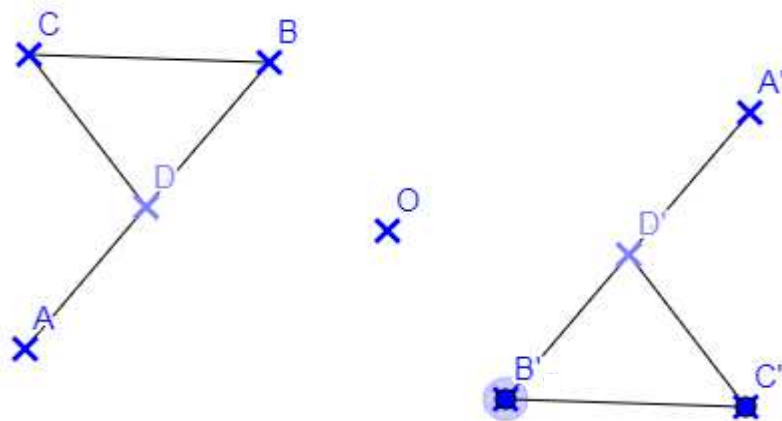
Si on fait tourner la feuille d'un demi-tour autour du point O on remarque que le visage de droite prend la place du visage de gauche et inversement.

On dit que le visage de droite est le symétrique du visage de gauche par rapport au point O.

Bien comprendre qu'une symétrie centrale est donc une symétrie par rapport à un point, et une symétrie axiale est une symétrie par rapport à une droite :

Dans une symétrie axiale on imagine un pliage par rapport à une droite, dans une symétrie centrale on imagine un demi-tour autour d'un point.

Exemple :



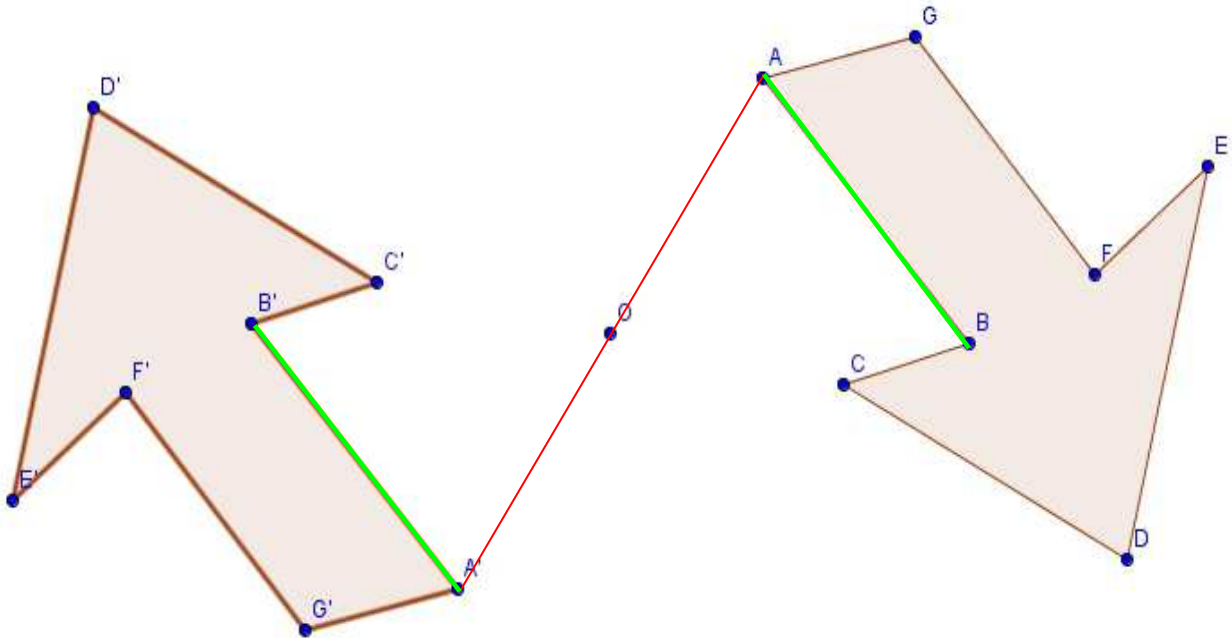
Sur cette figure :

- C et C' sont symétriques par rapport au point O.
- A est le symétrique de A' par rapport au point O.
- B' est le symétrique de B par rapport au point O.

- $[CD]$ et $[C'D']$ sont symétriques par rapport au point O .
- Etc.

2) Propriétés :

On a tracé deux polygones symétriques par rapport au point O :



Sur cette figure on voit que les flèches $ABCDEFG$ et $A'B'C'D'E'F'G'$ sont symétriques par rapport au point O .

(Faites tourner la feuille d'un demi tour autour du point O et vous verrez que la première flèche prend la place de la seconde et inversement.)

- Les points A et A' sont symétriques par rapport au point O . Si on trace $[AA']$ on remarque que O est le milieu de $[AA']$ *(Je vous l'ai tracé en rouge sur la figure... ma bonté me perdra !)*
- On remarque aussi que O est le milieu de $[BB']$, de $[CC']$ etc.

On en déduit cette propriété :

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si M et M' sont deux points symétriques par rapport à un point O, alors O est le milieu de $[MM']$. |
|--|

Cette propriété nous permet de construire facilement le symétrique d'un point par rapport à un autre. (Lire la partie « L'art de construire – 2^{ème} partie » pour voir comment on fait.)

Remarque 1 :

On a tracé en vert les segments $[AB]$ et $[A'B']$ (autrement dit deux segments symétriques par rapport au point O.)

On remarque que les segments sont parallèles. Ce qui est normal, car si on fait tourner une droite d'un demi-tour on obtient forcément une droite parallèle à la première non ?

On a donc aussi cette propriété sur les symétries centrales :

- Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.

Remarque 2 :

Puisque les deux flèches se superposent parfaitement, puisque la seconde est obtenue à partir de la première en la faisant simplement tourner, on retrouve facilement (comme pour la symétrie axiale) :

- La symétrie centrale conserve les longueurs et les périmètres
- La symétrie centrale conserve les mesures d'angles
- La symétrie centrale conserve les formes et les aires (les surfaces)
- La symétrie centrale conserve les milieux

Exemple :

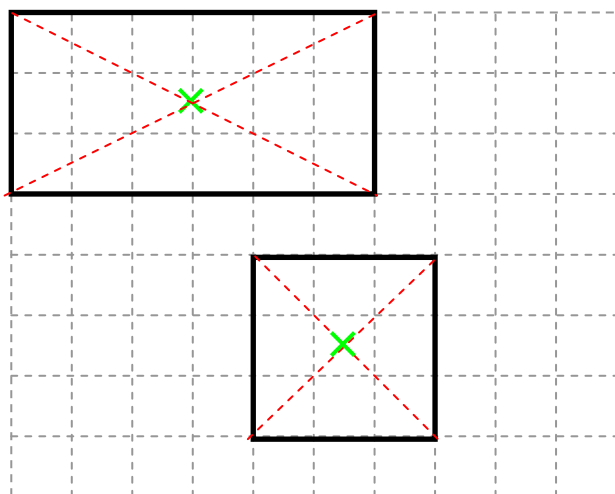
Par rapport à un point :

- 1) Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.
- 2) Le symétrique d'un triangle isocèle est un triangle isocèle.
- 3) Le symétrique d'un polygone de 25 cm de périmètre est un polygone de 25 cm de périmètre.
Le symétrique d'un carré de 36 cm^2 d'aire est un carré de 36 cm^2 .

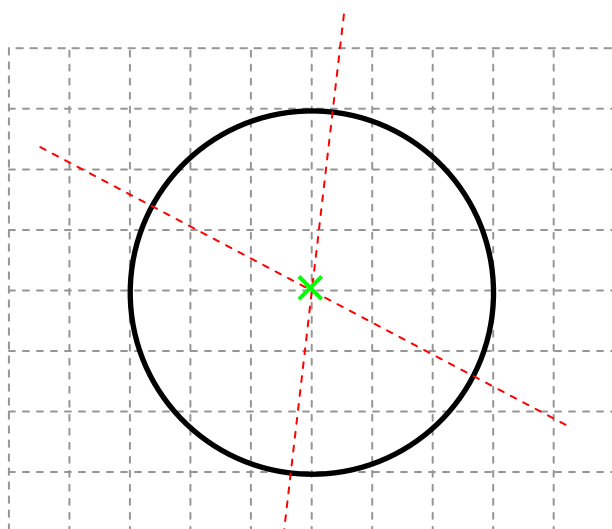
3) Centres de symétrie :

- Un point est le centre de symétrie d'une figure si on faisant tourner cette figure d'un demi-tour autour de ce point cette figure se superpose à elle-même.

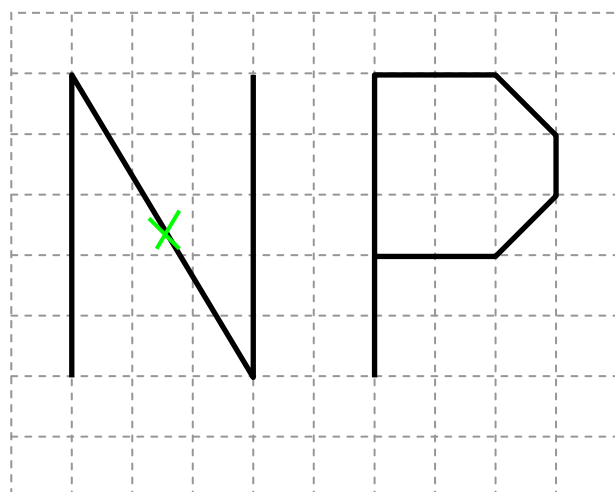
Exemples :



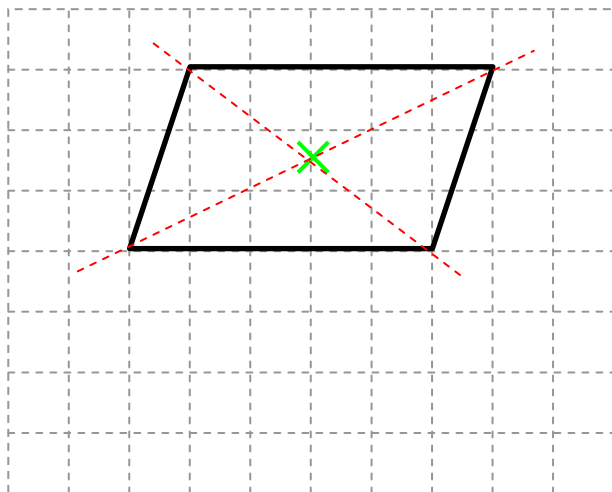
Le rectangle et le carré ont un centre de symétrie : le point d'intersection de leurs diagonales. *(Le point vert sur les figures.)*



Le cercle a un centre de symétrie : son centre (le point d'intersection de ses diamètres.)



La lettre N a un centre de symétrie : le milieu de sa barre diagonale. La lettre P n'en a pas : on fait tourner la lettre P sur elle-même d'un demi tour on ne retrouve pas la lettre P.



Le parallélogramme a un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.

Le triangle n'a pas de centre de symétrie : si on tourne d'un demi-tour un triangle ayant un sommet « en haut » on se retrouve avec un triangle ayant un sommet « en bas »...

Remarques :

- Une figure géométrique ne peut avoir qu'un seul centre de symétrie !
- Si une figure a un centre de symétrie, ce centre de symétrie est forcément à l'intersection de ses axes de symétrie s'il en a.

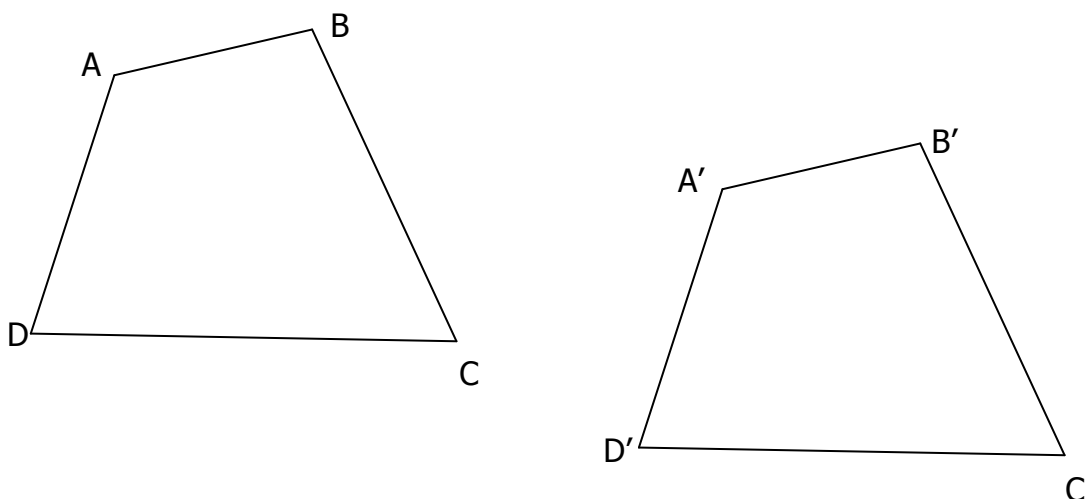
39- TRANSLATIONS

Alors la translation est une autre transformation du plan... Elle est à simple à visualiser et à comprendre, alors on passe vite dessus hein on a plein d'autres choses à faire !

I. Définitions :

Une translation est tout simplement un « glissement » : on prend la figure de départ et on la fait glisser sans la tourner et sans la déformer.

Exemple :

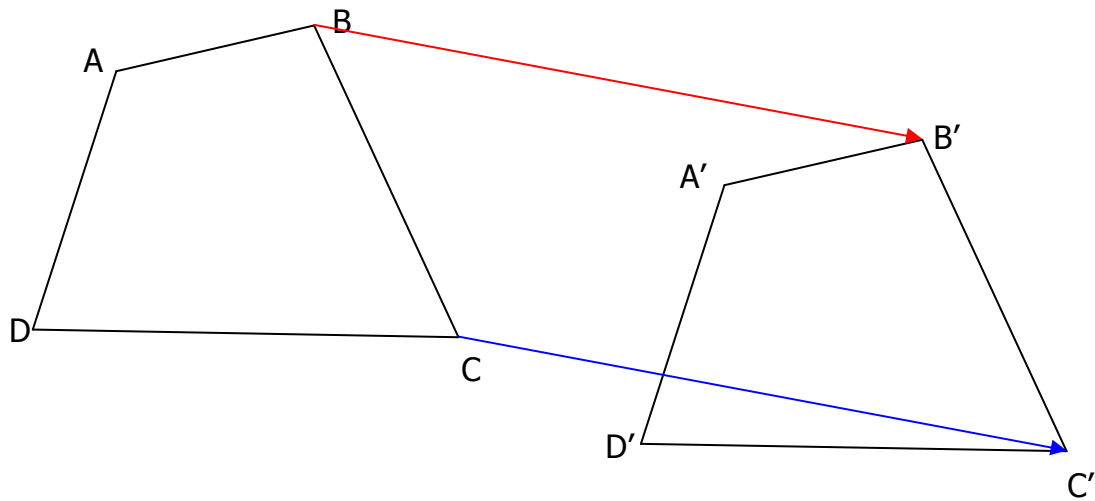


Sur cette figure, le quadrilatère $A'B'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par une translation (et inversement) : pour passer du premier au deuxième on le fait glisser sans le déformer et sans le tourner, et inversement.

Remarque :

Pour caractériser une translation, il suffit d'indiquer un point de départ et un point d'arrivée pour qu'on « comprenne » le déplacement qui est effectué.

On reprend l'exemple précédent :



On a donc repris nos deux quadrilatères précédents. On voit que le déplacement qu'on a utilisé pour passer de ABCD à A'B'C'D' est représenté par la flèche rouge : celui qui va de B à B'.

C'est le même déplacement qui va de C à C' (représenté par la flèche bleue.)

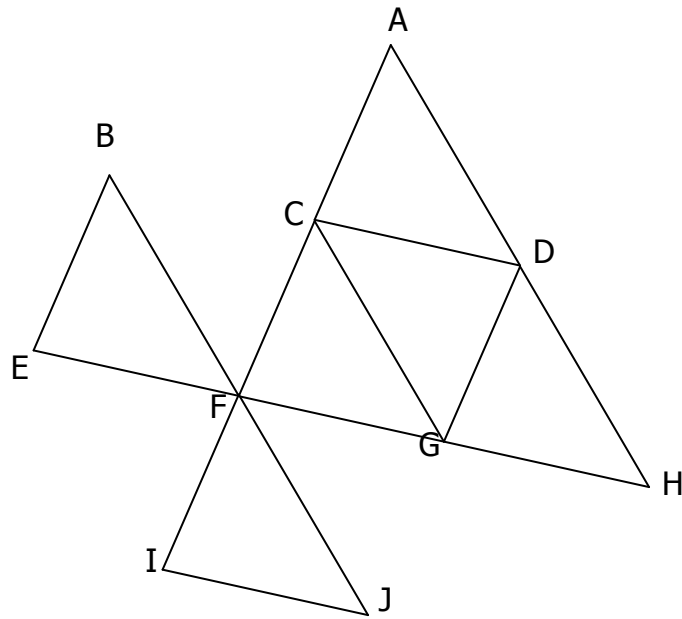
On dira que A'B'C'D' est l'image de ABCD par la translation qui transforme B en B' (ou C en C' ; ou A en A' ou D en D'.)

De même ABCD est l'image de A'B'C'D' par la translation qui transforme B' en B (ou A' en A, etc.)

Remarques :

- On utilise le mot « image » pour nommer la figure obtenue après transformation (comme pour les fonctions où on nomme ainsi la valeur obtenue à partir d'une valeur de départ par une fonction.)
- La flèche utilisée pour représenter la translation est appelée vecteur en mathématiques. Mot qu'il est inutile de retenir pour le brevet.

Exercice :



- 1) Caractériser la transformation qui :
 - a) Transforme BEF en CFG
 - b) Transforme DGH en BEF
 - c) Transforme ACD en BEF
- 2) Quelle est l'image de CFG par la translation qui :
 - a) transforme C en F ?
 - b) transforme G en D ?
 - c) transforme F en G ?

Solution :

- 1)
 - a) c'est la translation qui transforme B en C (ou E en F ou F en G)
 - b) c'est la translation qui transforme G en E (ou H en F ou D en B)
 - c) c'est la translation qui transforme A en B (ou C en E ou D en F)
- 2)
 - a) FIJ
 - b) ACD
 - c) DGH

(Respectez l'ordre des points : en a) l'image est FIJ et pas IJF car l'image de C est F et pas I...)

II. Propriétés :

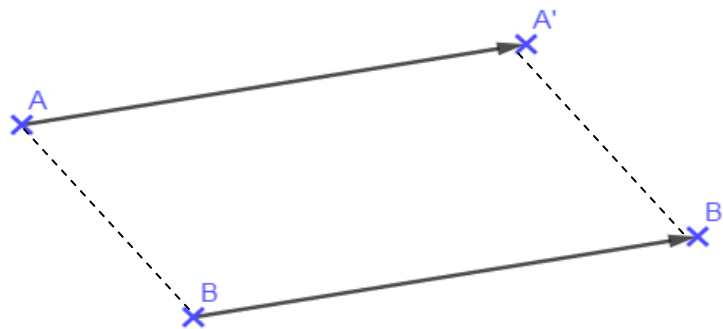
Comme pour les symétries, il est facile de comprendre que lorsqu'on translate une figure géométrique, on obtient exactement la même figure géométrique qu'au départ, et que les deux sont donc parfaitement superposables.

On en déduit donc cette propriété évidente :

- La translation conserve les longueurs, l'alignement, les périmètres, les milieux, les formes, les angles, les aires.

Par contre la propriété qui va suivre est plus intéressante et plus importante.

Sur l'image ci-dessous, A' est l'image de A par la translation qui transforme B en B' :



On remarque que $AA'B'B$ est un parallélogramme.
Donc :

- Si M' est l'image de M par la translation qui transforme A en A' alors $MM'A'A$ est un parallélogramme.

Et aussi cette propriété réciproque :

- Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors B est l'image de A par la translation qui transforme D en C .

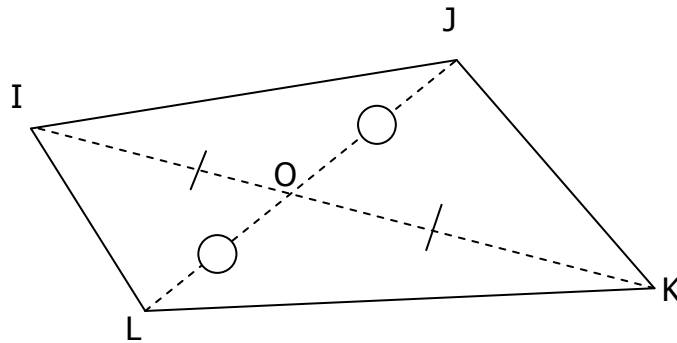
Bien faire attention à l'ordre des points ! Un petit dessin à main levée permet d'éviter de faire de grosses erreurs.

Remarque :

La première propriété permet de construire des images par translation à l'aide des instruments de géométrie (Voir le chapitre « L'art de construire 2^{ème} partie » pour la comprendre.)

Exercice :

On considère ce dessin réalisé à main levée, où O est le milieu de $[IK]$ et aussi le milieu de $[JL]$:



Démontrer que K est l'image de J par la translation qui transforme I en L :

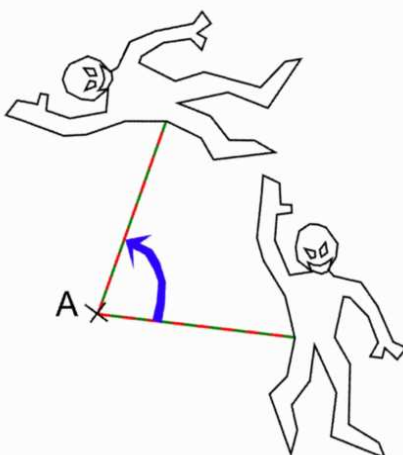
- On sait que les diagonales $[IK]$ et $[JL]$ du quadrilatère $IJKL$ se coupent en leur milieu.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors il s'agit d'un parallélogramme.
Donc $IJKL$ est un parallélogramme.
- On en déduit que K est l'image de J par la translation qui transforme I en L .
(On aurait pu aussi en déduire que J est l'image de I par la translation qui transforme L en K , ou que I est l'image de L par la translation qui transforme K en J , etc.)

40- ROTATIONS

On va faire tourner des figures géométriques autour d'un point maintenant... On se demande bien comment s'appelle ce genre de transformation...

I. Définitions :

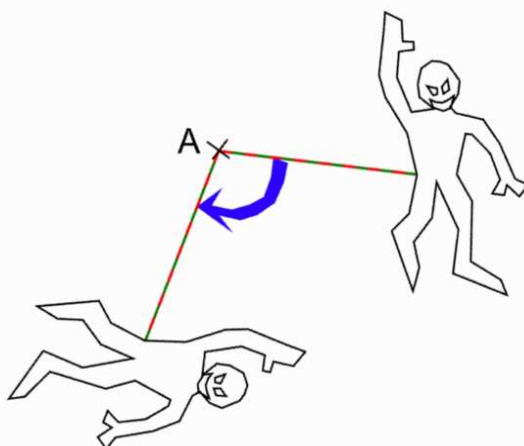
Exemple introductif 1 :



Sur cette figure, on a fait tourner le personnage dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour du point A d'un certain nombre de degrés.

Ce sens de rotation est appelé sens direct ou sens trigonométrique ou sens anti horaire (contraire au sens des aiguilles d'une montre.)

Exemple introductif 2 :



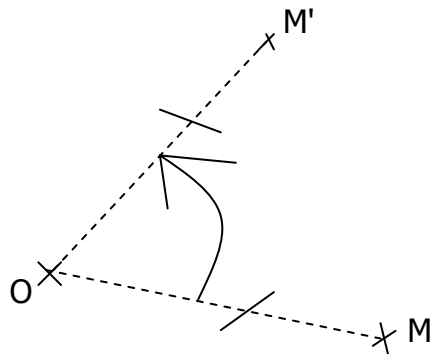
Sur cette figure, on a fait tourner le personnage dans le sens des aiguilles d'une montre autour du point A d'un certain nombre de degrés.

Ce sens de rotation est appelé sens indirect ou sens horaire (le sens des aiguilles d'une montre.)

On voit donc que pour définir une rotation il nous faut connaître trois choses :

- son centre (le point autour duquel on va tourner)
- son sens (dans quel sens on va tourner)
- son angle (de combien de degrés on va tourner)

Si on fait un dessin à main levée représentant M' l'image d'un point M par une rotation de centre O et d'angle x° dans le sens direct on obtient ceci :



Et on remarque que $OM = OM'$ et que $\widehat{M'OM} = x^\circ$

Ce qui nous donne cette propriété définissant les rotations :

- Si M' est l'image de M par une rotation de centre O et d'angle x° de sens direct alors:
 - $OM = OM'$
 - $\widehat{M'OM} = x^\circ$
 - On va de M vers M' en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre
- Si M' est l'image de M par une rotation de centre O et d'angle x° de sens indirect alors:
 - $OM = OM'$
 - $\widehat{M'OM} = x^\circ$
 - On va de M vers M' en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre

(Dans la partie L'art de Construire - 2ème Partie, vous verrez comment on construit l'image d'un point par une rotation à l'aide d'une règle graduée et du rapporteur...)

II. Propriétés des rotations :

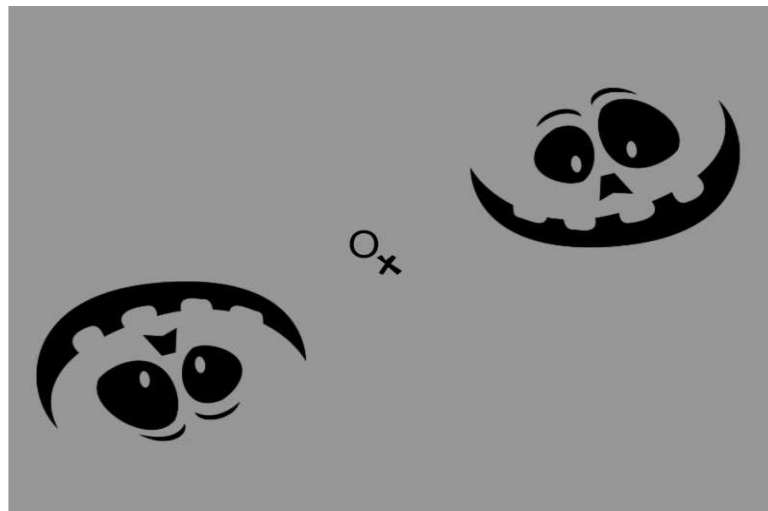
Lorsqu'on fait tourner une figure autour d'un point, elle ne change ni de forme ni de dimensions... Autrement dit une rotation conserve tout !

- Les rotations conservent l'alignement, les milieux, les longueurs, les périmètres, les angles, les formes et les aires.

Cela signifie que l'image par une rotation d'un carré de 5 cm de côté est un carré de 5 cm de côté, etc. Donc toutes les informations que vous avez sur la figure de départ se retrouveront sur la figure d'arrivée après une rotation (c'est pareil que pour les symétries et les translations d'ailleurs...)

Remarque :

Si on effectue une rotation de 180° on peut tourner dans un sens ou dans l'autre, on obtient la même figure au final. Comme dans cet exemple où on effectuée la rotation d'une figure autour du point O :



Hum hum... c'est bizarre mais il me semble qu'on a déjà vu ce dessin là avant non ? Et oui ! On remarque qu'une rotation de 180° n'est rien d'autre qu'une symétrie centrale, appelée aussi... demi-tour...

On verra aussi qu'un demi-tour est aussi une homothétie de rapport - 1...

Allez on s'exerce avec les transformations du plan et les rotations !

Exercice 1 :

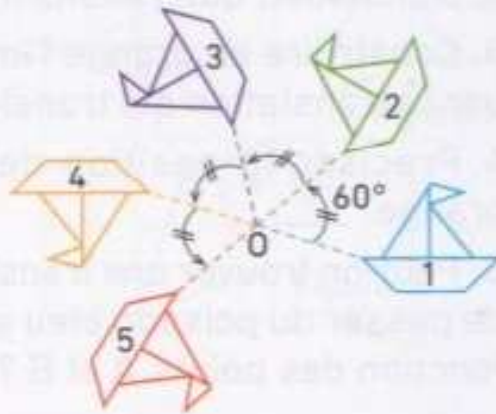
Recopier et compléter les phrases suivantes en précisant les caractéristiques des rotations appliquées.

a. Le bateau 2 est l'image du bateau 1 par la rotation

b. Le bateau 3 est l'image du bateau 1 par la rotation

c. Le bateau 5 est l'image du bateau 4 par la rotation

d. Le bateau 5 est l'image du bateau 1 par la rotation



Solution :

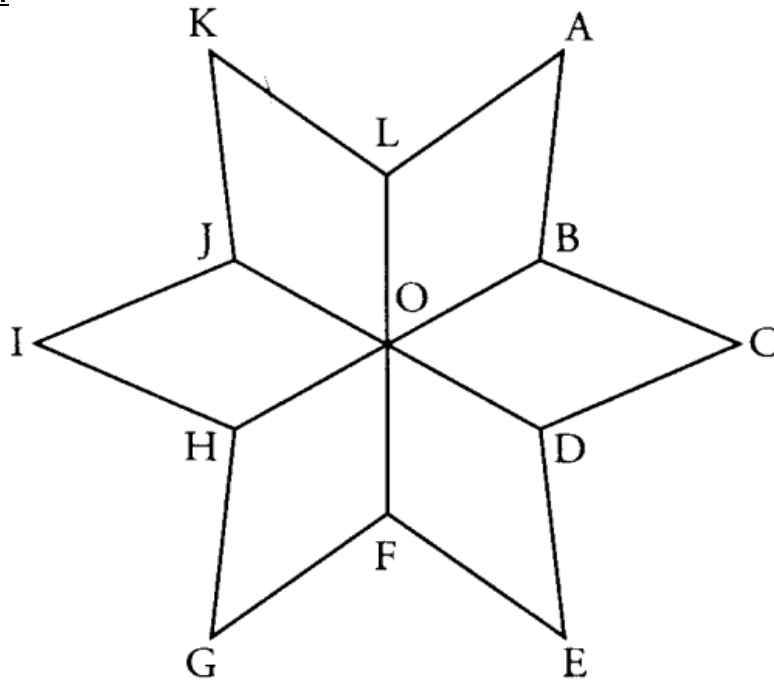
a) le bateau 2 est l'image du bateau 1 par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens direct.

b) le bateau 3 est l'image du bateau 1 par la rotation de centre O et d'angle 120° dans le sens direct.

c) le bateau 5 est l'image du bateau 4 par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens direct.

d) le bateau 5 est l'image du bateau 1 par la rotation de centre O et d'angle 240° dans le sens direct. (On peut aussi l'obtenir par la rotation de centre O et d'angle 120° dans le sens horaire, car $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$)

Exercice 2 :



- 1) Quelle est l'image de OLAB par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens horaire ?
- 2) Quelle est l'image de OHGF par la rotation de centre O et d'angle 180° ?
- 3) Quelle transformation du plan permet de passer de IJOH à KLOJ ?
- 4) Quelle transformation du plan permet de passer de IJOH à KJOL ?

Solution :

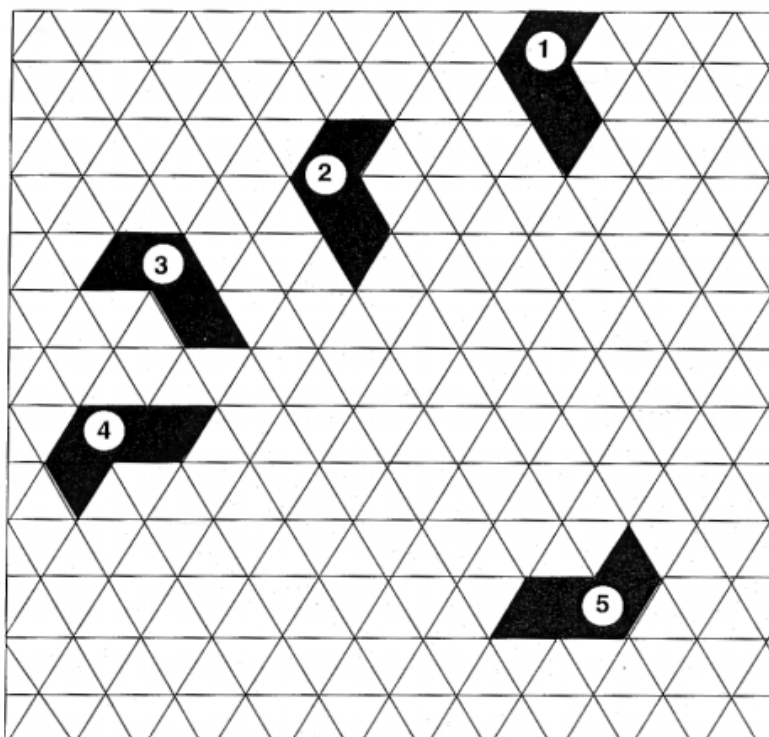
1) C'est OBCD

2) C'est OBAL

3) La rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens horaire

4) Si on veut être très pointilleux, ce n'est pas la même réponse qu'en 3) En effet, si on respecte l'ordre des lettres des deux quadrilatères donnés (I correspond à K, J correspond à J, O correspond à O et H correspond à L), il s'agit alors de la symétrie d'axe (JO)...

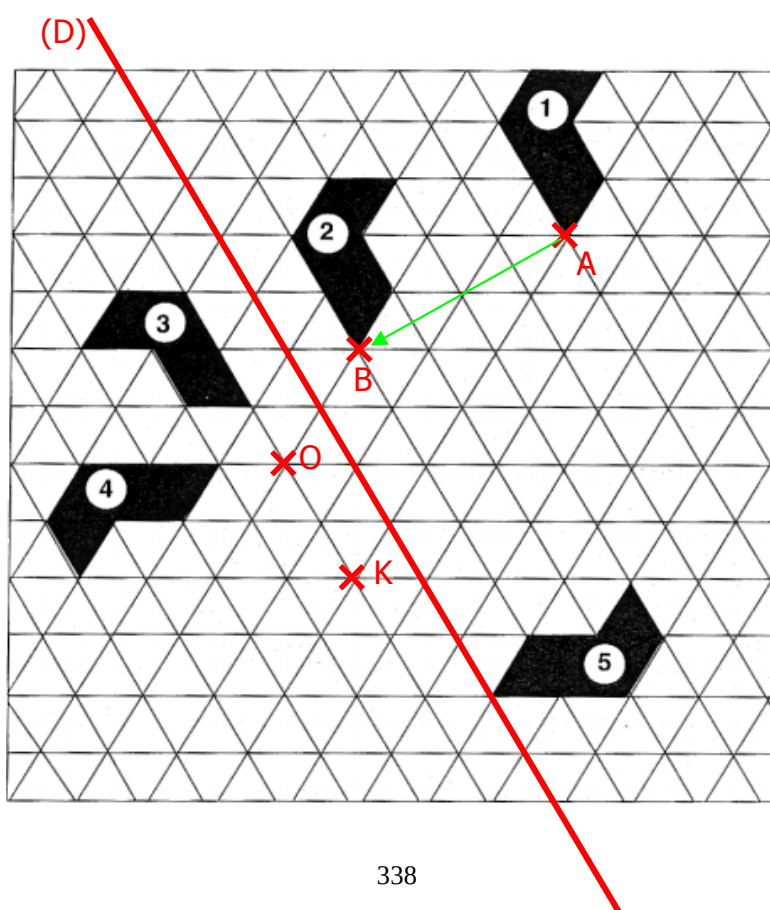
Exercice 3 :



Indiquer quelle transformation passer de la première figure à la seconde et préciser (tracer ou placer) ses éléments sur le dessin dans chaque cas :

- 1) de la figure 3 à la figure 2
- 2) de la figure 1 à la figure 2
- 3) de la figure 3 à la figure 4
- 4) de la figure 5 à la figure 4

Solution :



1) de la figure 3 à la figure 2 :
symétrie par rapport à la droite (D)

2) de la figure 1 à la figure 2 :
translation qui transforme A en B

3) de la figure 3 à la figure 4 :
rotation de centre O d'angle 60° dans le sens direct

4) de la figure 5 à la figure 4 :
rotation de centre K et d'angle 180°
ou demi-tour de centre K
ou symétrie par rapport au point K
(ou homothétie de rapport -1 et de centre K)

41- HOMOTHETIES

Bon alors ça c'est un peu particulier mais au final vous verrez que ce n'est pas plus compliqué que les autres transformations du plan qu'on a vues...

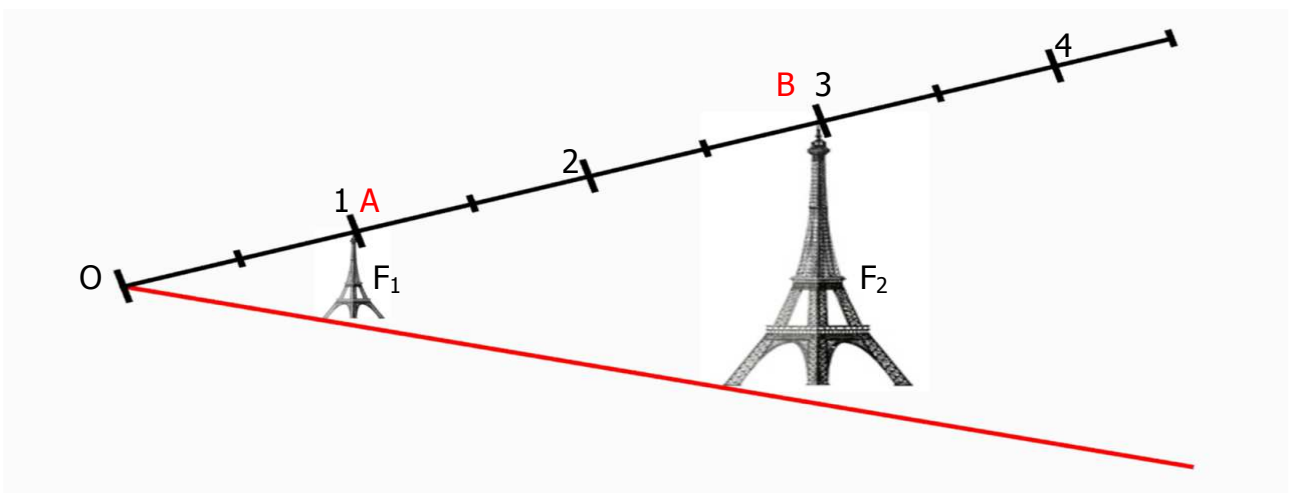
Pour définir une homothétie il nous faut deux choses :

- un centre
- un rapport. Ce rapport peut être positif ou négatif. Suivant son signe, la figure finale obtenue sera un peu différente...

I. Introduction :

Quelques exemples d'abord pour que vous compreniez en quoi consiste une homothétie.

Exemple 1:



Sur ce dessin, la figure F_2 est l'image de la figure F_1 par une homothétie de centre O. Si on trace la demi-droite d'origine O passant par le sommet de la tour Eiffel en F_1 on constate aussi par le sommet de la tour Eiffel F_2 .

De même, la demi-droite d'origine O passant par le pied gauche de F_1 passe aussi par le pied droit de F_2 .

Si vous tracez la demi-droite partant de O et passant par un point particulier de la tour F_1 vous verrez qu'elle passera aussi par le point correspondant sur la tour F_2 .

Voilà pourquoi O est **le centre** de cette homothétie.

Maintenant si on appelle A et B le sommet des tours F_1 et F_2 et qu'on utilise les graduations de la règle donnée sur le dessin on remarque que :

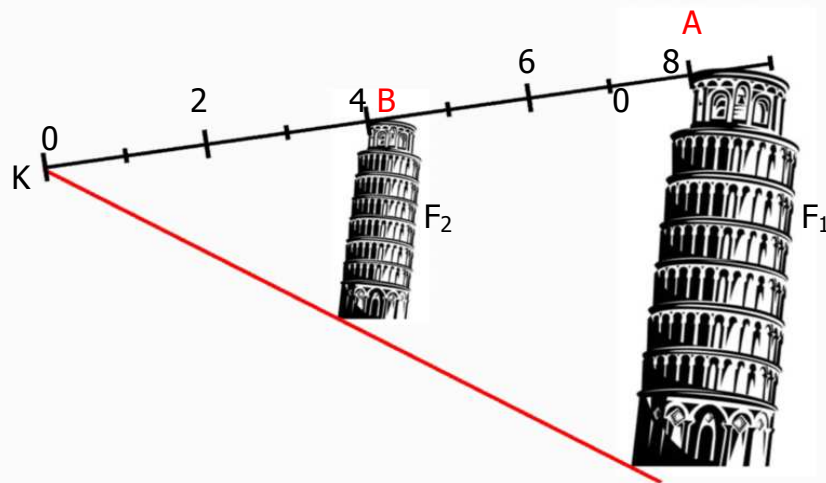
$$\frac{AB}{OA} = \frac{3}{1} = 3$$

Autrement dit, la tour F_2 est 3 fois plus loin de O que la tour F_1 et elle est aussi 3 fois plus grande. (Vous pouvez mesurer les deux tours pour les comparer et le remarquer.)

Voilà pourquoi on dira que le **rapport** de cette homothétie est 3.

Autrement dit, la figure F_2 est l'image de la figure F_1 par **l'homothétie de centre O et de rapport 3**.

Exemple 2 :



Sur ce dessin, la figure F_2 est l'image de la figure F_1 par une homothétie de centre K . (On le voit car si on trace deux droites passant par deux points correspondants des deux figures on voit qu'elles se coupent en K .)

Utilisons les informations données par la règle graduée pour trouver le rapport de cette homothétie.

On voit que le point A devient le point B par cette homothétie (ils correspondent aux sommets des deux tours de Pise.)

On calcule alors :

$$\frac{KB}{KA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Donc la figure F_2 est deux fois plus proche de K que la figure F_1 , mais elle est aussi deux fois plus petite.

Autrement dit, la figure F_2 est l'image de la figure F_1 par **l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$** .

Remarque :

On voit donc que si le rapport est plus grand que 1, comme dans l'exemple 1, on va agrandir la figure de départ et l'éloigner du centre de l'homothétie.

Par contre, si le rapport est plus petit que 1, comme dans l'exemple 2, on va réduire la figure de départ mais aussi la rapprocher du centre de l'homothétie.

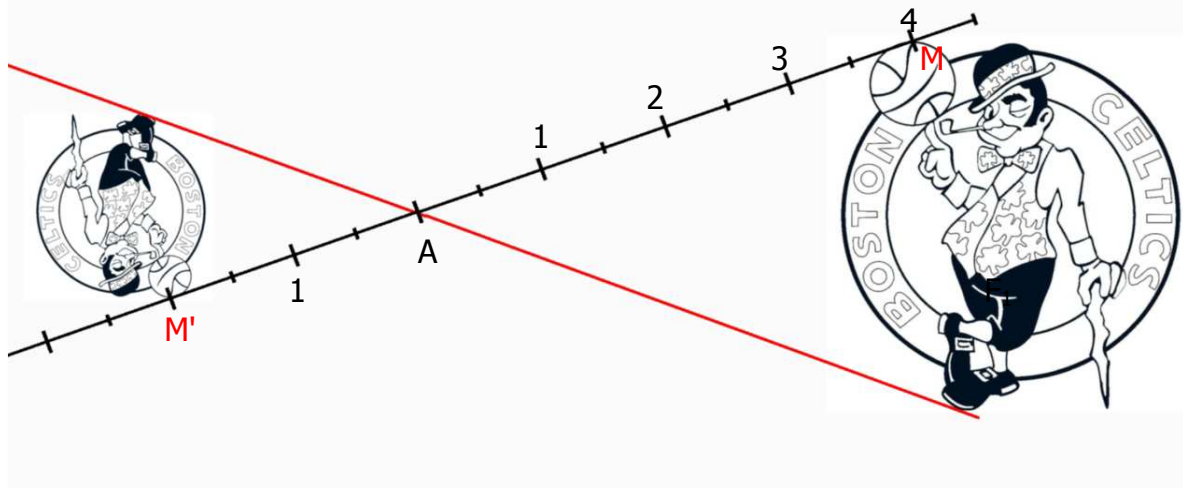
Remarque 2 :

Dans l'exemple 2, on passe de la figure F_1 à la figure F_2 par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

Donc pour passer de la figure F_2 à la figure F_1 on utilisera alors une homothétie de même centre mais de rapport 2. (L'inverse de $\frac{1}{2}$.)

Alors maintenant, regardons sur un exemple supplémentaire ce qui se passe lorsque nous utilisons une homothétie de rapport négatif...

Exemple 3 :



Sur cette figure, on passe du logo des Boston Celtics de droite à celui de gauche par une homothétie. On voit bien qu'il y a un changement de "taille" entre les deux logos, mais on voit aussi que le logo de gauche a effectué un demi-tour sur lui-même en plus.

On voit aussi que le centre A de l'homothétie, obtenue à l'intersection de deux droites joignant deux points correspondants des deux logos, se trouve entre les deux logos.

(Dans les deux premiers exemples les deux figures se trouvaient du même côté par rapport au centre de l'homothétie.)

C'est ce qui se passe lorsqu'on utilise une homothétie de rapport négatif.

Déterminons le rapport de cette homothétie à l'aide des mesures fournies.

On passe de M à M' par cette homothétie donc on calcule :

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc la figure de gauche est deux fois plus petites que la figure de droite et elle est inversée.

Autrement dit, M' est l'image de M par ***l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$*** .

Remarque 3 :

Le rapport des longueurs est toujours positif, mais si les deux figures sont tournées l'une par rapport à l'autre il ne faut pas oublier de mettre un signe - devant le rapport trouvé par calcul.

On en déduit ces deux propriétés :

- Si M' est l'image de M par une homothétie de centre O et de rapport positif k , alors M' est situé sur la demi-droite $[OM)$ et $OM' = OM \times k$
- Si M' est l'image de M par une homothétie de centre O et de rapport $-k$ négatif, alors O est situé sur $[MM']$ et $OM' = OM \times k$

(Vous verrez dans L'art de construire - 2ème Partie, comme on utilise cette propriété pour effectuer des constructions à la règle graduée...)

II. Propriétés des homothéties :

Alors déjà, et contrairement aux autres transformations du plan vues précédemment, les mesures ne seront pas conservées ! (Sauf si c'est une homothétie de rapport 1 ou - 1 !)

Par contre agrandir ou réduire une figure géométrique et retourner une figure géométrique conservent les formes de ces figures.

Donc...

- Les homothéties conservent l'alignement, les milieux, les angles, les formes, le parallélisme.

Mais encore une fois les dimensions ne sont plus forcément conservées, donc les longueurs, les périmètres et les aires ne sont pas conservées !

Par contre on a quand même cette propriété intéressante :

- Si une figure est obtenue par une homothétie de rapport $(+ \text{ ou } -) k$ (avec k positif), alors ses longueurs sont multipliées par k , son périmètre est multiplié par k et son aire est multipliée par k^2 .

Exemple :

Considérons un carré de côté 5 cm et appliquons lui une homothétie de rapport - 3.

Alors l'image obtenue sera un carré de 15 cm de côté ($5 \times 3 = 15$)

L'aire du carré de départ est de 25 cm^2 ($5 \times 5 = 25$)

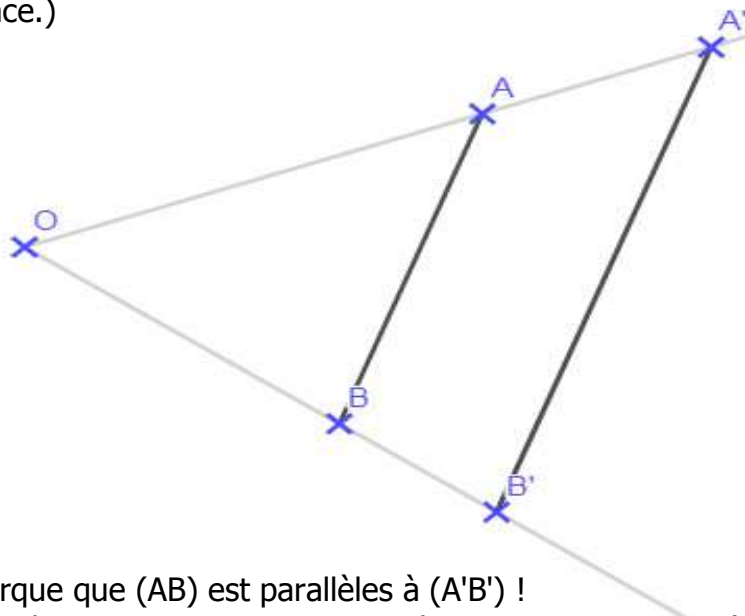
L'aire du carré image aura une aire de 225 cm^2 .

En effet, on calcule : $25 \times 3^2 = 25 \times 9 = 225...$

Attention à ne jamais multiplier les aires par 3 dans ce cas ! Un carré 3 fois plus grand n'a pas une aire 3 fois plus grande...

Il reste une propriété intéressante à voir.

Considérons cette construction où on a construit A' et B' les images respectives de A et B par une homothétie. (Dans cet exemple le rapport est positif mais ça n'a aucune importance.)



On remarque que (AB) est parallèles à $(A'B')$!

Ce qui est logique car on peut, normalement, remarquer qu'on a juste à appliquer la réciproque du théorème de Thalès puisque $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \text{rapport de l'homothétie}...$

On en déduit cette propriété importante :

- Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une même homothétie, alors on a : $(AB) \parallel (A'B')$

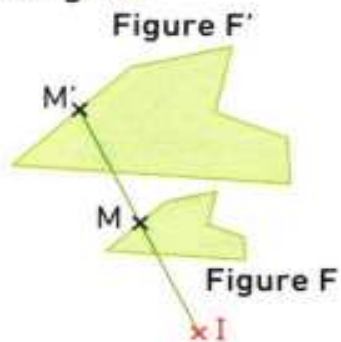
Allez hop, un petit exercice sur les homothéties...

Exercice :

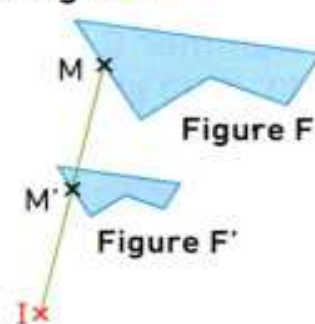
Associer chaque homothétie a) b) c) et d) à chacune des images 1) 2) 3) et 4) sachant qu'on passe de la figure F à la figure F' :

- a. homothétie de centre I et de rapport 2 ;
- b. homothétie de centre I et de rapport -3 ;
- c. homothétie de centre I et de rapport 0,5 ;
- d. homothétie de centre I et de rapport -0,5.

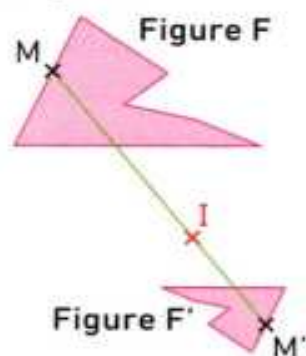
• Image ①



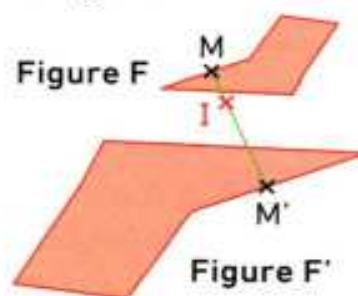
• Image ②



• Image ③



• Image ④



Solution :

figure 1 : homothétie a)

figure 2 : homothétie c) (car $\frac{1}{2} = 0,5$)

figure 3 : homothétie d)

figure 4 : homothétie b)

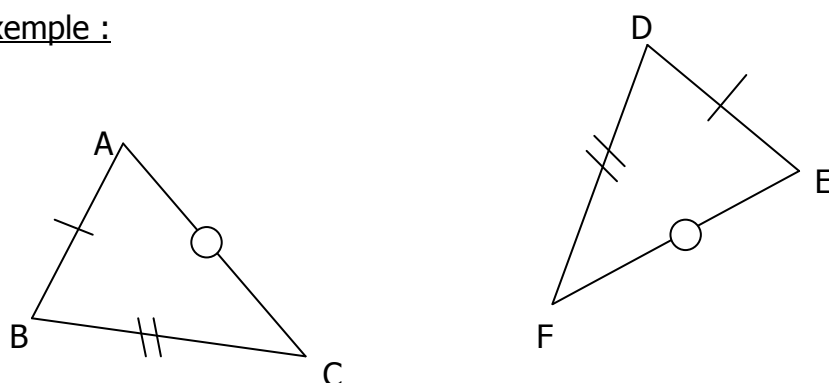
TRIANGLES ÉGAUX & TRIANGLES SEMBLABLES

I. Les triangles égaux :

- Deux triangles sont égaux si leurs côtés sont deux à deux égaux.

(Donc deux triangles égaux sont tout simplement deux triangles qu'on peut superposer si on les découpe et qu'on les tourne ou qu'on les inverse.)

Exemple :



Les triangles ABC et DEF sont égaux car $AB = DE$, $BC = EF$ et $AC = DF$.

On a plusieurs propriétés concernant les triangles égaux qui sont assez évidentes.

- Si deux triangles sont égaux alors leurs angles sont deux à deux égaux.

(C'est logique car si les triangles sont superposables alors les angles se superposent...)

Exemple : sur la figure précédente, on a : $\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$ etc.

Remarque 1 :

Si deux triangles sont égaux ils sont superposables.

(C'est ce que je vous dis depuis le début...Ne soyez pas surpris comme ça !)

Remarque 2 :

Si un triangle est l'image d'un premier triangle par une symétrie (axiale ou centrale), une rotation ou une translation, alors ces deux triangles sont égaux.

(Voir les chapitres sur les transformations du plan pour comprendre pourquoi...)

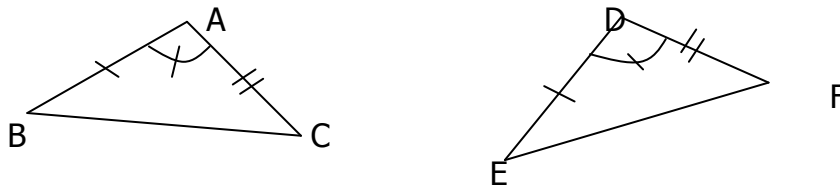
Des propriétés pour démontrer que deux triangles sont égaux :

- Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux égaux, alors ils sont égaux.
- Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur alors ils sont égaux.
- Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur compris entre deux angles égaux alors ils sont égaux.

(La première n'est rien d'autre que la définition de deux triangles égaux, Les deux suivantes se retrouvent logiquement...)

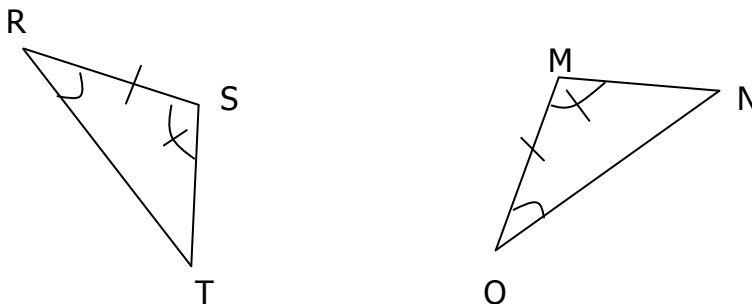
Exemples :

1)



Les triangles ABC et DEF sont égaux car ils ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur ($\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $AB = DE$ et $AC = DF$.)

2)



Les triangles RST et MNO sont égaux car ils ont, deux à deux, un côté de même longueur compris entre deux angles égaux ($\widehat{TRS} = \widehat{MON}$, $\widehat{RST} = \widehat{OMN}$ et $RS = MO$.)

Remarque :

Lorsque deux triangles sont égaux, deux angles superposables sont appelés angles homologues et deux côtés superposables sont appelés côtés homologues.

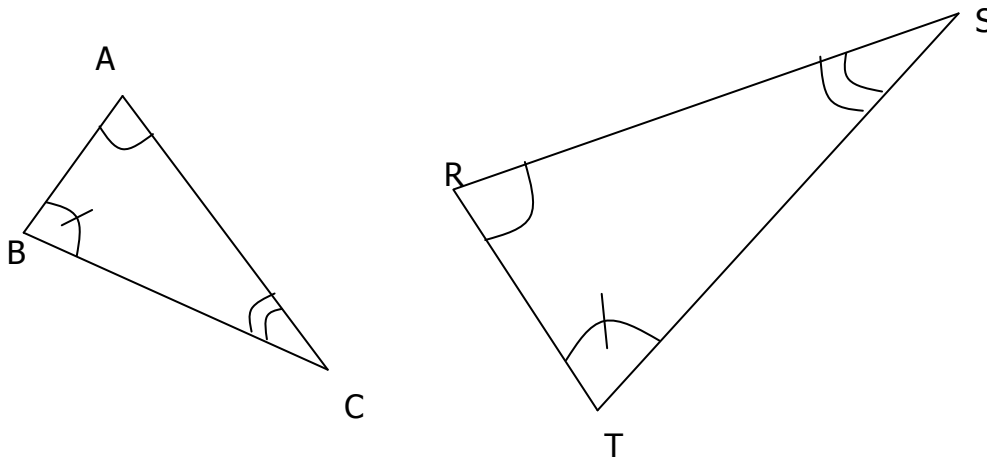
Exemple :

Sur la figure 2) précédente, les angles $\widehat{TRS}$ et $\widehat{NOM}$ sont homologues.
Les côtés $[ST]$ et $[MN]$ sont homologues.

II. Triangles semblables :

- Deux triangles sont semblables si leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Exemple :



Les triangles ABC et RST sont semblables car on a :

$$\widehat{ABC} = \widehat{RST} \quad \widehat{BAC} = \widehat{TRS} \quad \widehat{ACB} = \widehat{RTS}$$

(En fait dès que vous retrouvez les mêmes angles dans deux triangles, alors vous avez deux triangles semblables.

Et si vous êtes malins, vous savez que cela signifie qu'un des deux triangles est le même que l'autre en « plus grand » ou « en plus petit », car quand on construit un triangle deux fois plus grand (ou trois fois plus grand ou trois fois plus petit, etc.) qu'un autre on ne change pas la mesure de leurs angles...)

Remarque :

On dit de deux triangles semblables qu'ils sont de même forme.

(Puisque ils sont identiques mais l'un est plus grand que l'autre dans les mêmes proportions...)

On a des propriétés importantes sur les triangles semblables :

- Deux triangles ayant, deux à deux, deux angles égaux sont semblables.

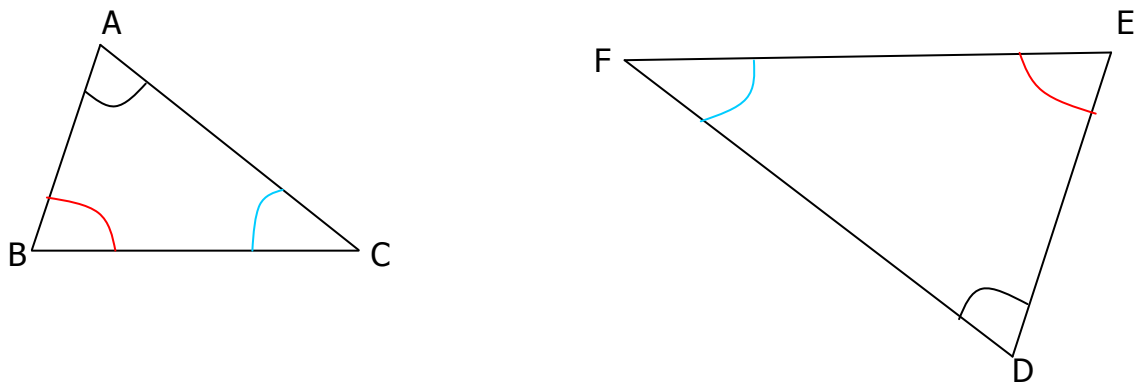
(Encore une fois c'est logique car si on connaît deux angles dans un triangle le troisième est connu aussi...)

- Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

(Si deux triangles sont semblables, alors les angles sont les mêmes d'un triangle à l'autre et les côtés du premier triangle sont proportionnels aux côtés du deuxième triangle...)

Exemple :

Sur cette figure, les triangles ABC et DEF sont semblables :



Comme ces triangles sont semblables alors on a :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{AC} = k$$

Le coefficient de proportionnalité (k) est appelé aussi coefficient ou rapport de réduction ou d'agrandissement.

Remarque 1 :

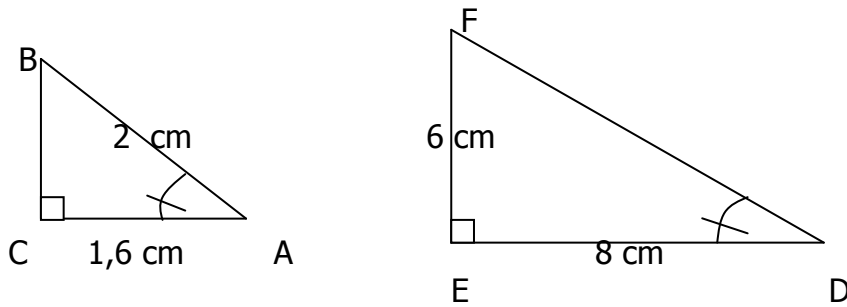
Dans l'exemple ci-dessus, le triangle DEF est un agrandissement du triangle ABC de rapport 1,5 (Le triangle DEF est 1,5 fois plus grand que ABC.)

Le triangle ABC est une réduction du triangle DEF de rapport 1,5.

Remarque 2 :

- Deux triangles égaux sont semblables. *(logique car ils ont les mêmes angles.)*
- Si un triangle est l'image d'un autre par une homothétie alors ces deux triangles sont semblables (égaux si l'homothétie est de rapport 1). *(voir chapitres sur les transformations du plan.)*

Exercice :



- 1) Montrer que les triangles ABC et DEF sont semblables.
- 2) En déduire les longueurs CB et AB.

Solution :

1) Les triangles ABC et DEF ont un angle droit chacun et on a $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.
Donc on en déduit que $\widehat{CBA} = \widehat{FDE}$ et que ces deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure.
Donc les triangles **ABC et DEF sont semblables**.

2) On a $\frac{ED}{AC} = \frac{8}{1,6} = 5$

Comme les deux triangles sont semblables, cela signifie que le triangle DEF est un agrandissement du triangle BCA de coefficient 5.

Donc : $FD = 5 \times BC = 5 \times 2 = \mathbf{10 \text{ (cm)}}$

Et : $BC = \frac{FE}{5} = \frac{6}{5} = \mathbf{1,2 \text{ (cm)}}$

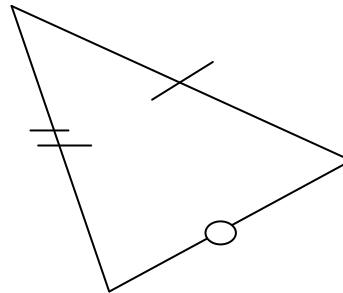
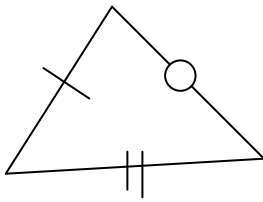
Une dernière propriété qui permet de repérer des triangles semblables :

- Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont semblables

(Ce qui veut dire que si un triangle est un agrandissement d'un autre (ou une réduction), alors forcément ces deux triangles sont semblables...)

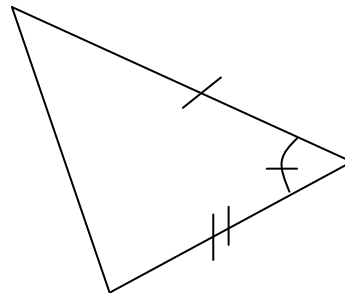
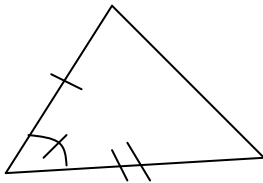
III. Récapitulatif :

1)



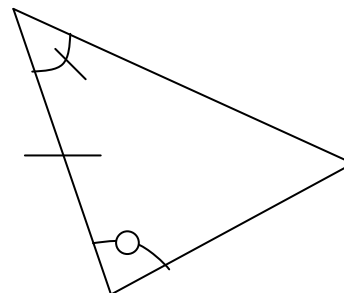
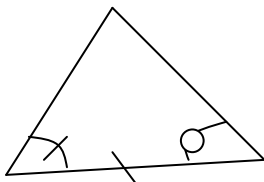
Ici les deux triangles sont égaux car ils ont leur côtés égaux deux à deux.

2)



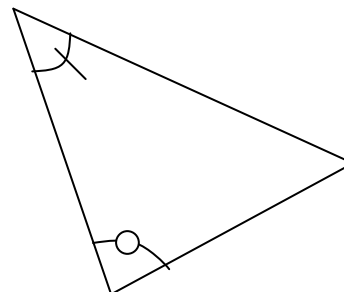
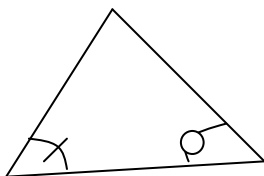
Ici les deux triangles sont égaux car ils ont deux à deux un angle de même mesure compris entre deux côtés de mêmes longueurs.

3)



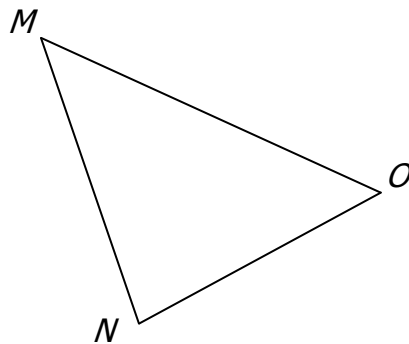
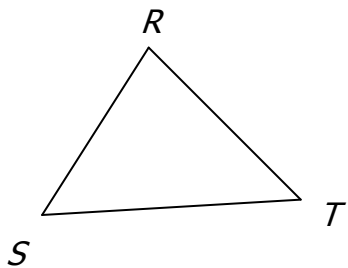
Ici les deux triangles sont égaux car ils ont deux à deux un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes mesures.

4)



Ici les deux triangles sont semblables car il ont, deux à deux, deux angles de même mesure.

5)



Supposons qu'ici on ait : $\frac{RS}{MO} = \frac{RT}{NO} = \frac{ST}{MN}$

Alors ici les triangles RST et MNO sont semblables et on a en plus :

$$\hat{R} = \hat{O} \quad \hat{T} = \hat{N} \quad \hat{S} = \hat{M}$$

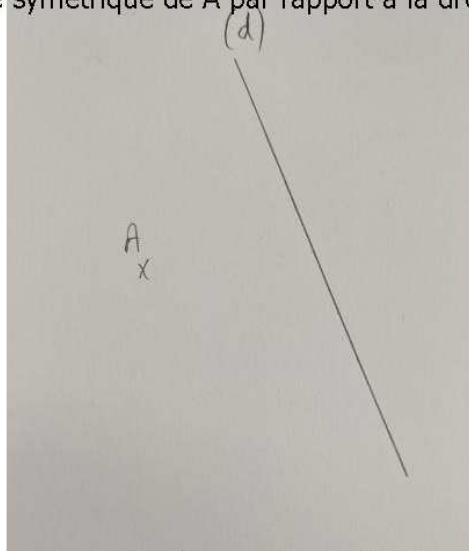
43- L'ART DE CONSTRUIRE - 2ème PARTIE

Dans cette partie nous allons voir comment on construit des images de points par une transformation du plan (symétries, translations, rotations, homothéties) à l'aide des instruments de géométrie.

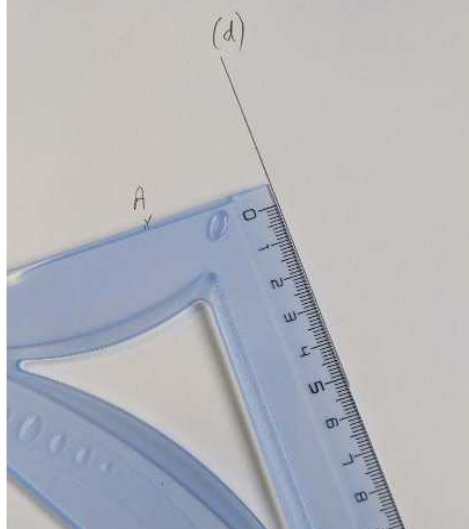
Pour chaque exemple je vous montre comment on fait pour un point dont on veut construire l'image.

I. Construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'aide de l'équerre et de la règle graduée :

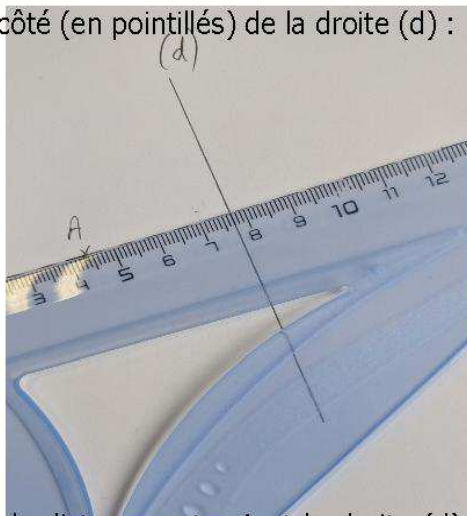
On veut construire A' le symétrique de A par rapport à la droite (d) :



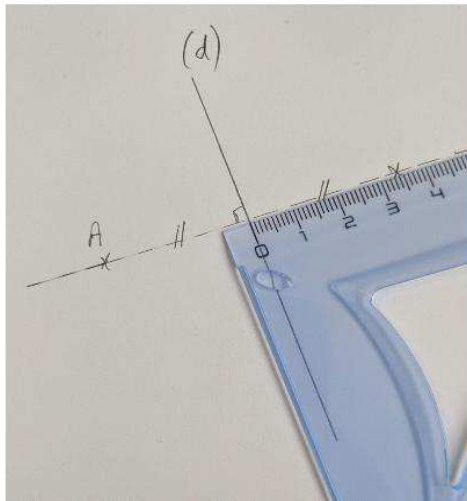
On plaque l'équerre contre la droite (d) et on trace la perpendiculaire à la droite passant par A :



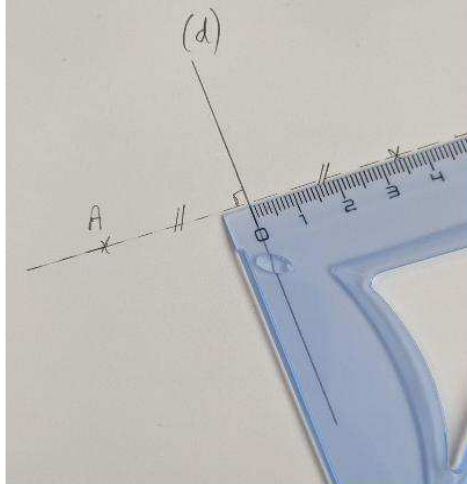
On prolonge de l'autre côté (en pointillés) de la droite (d) :



On mesure maintenant la distance entre A et la droite (d) sur cette perpendiculaire en pointillés et on reporte de l'autre côté de la droite :

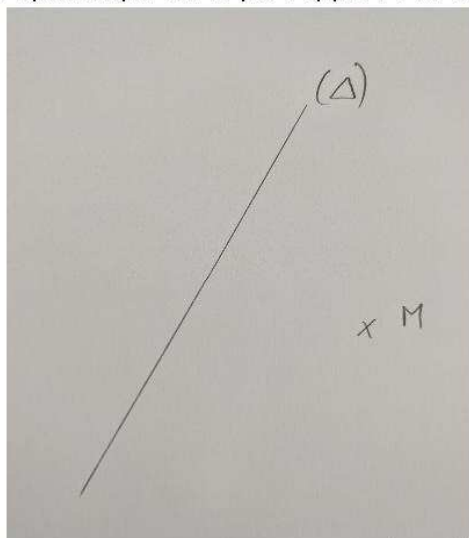


A cet emplacement on obtient A' le symétrique de A par rapport à la droite (d) :

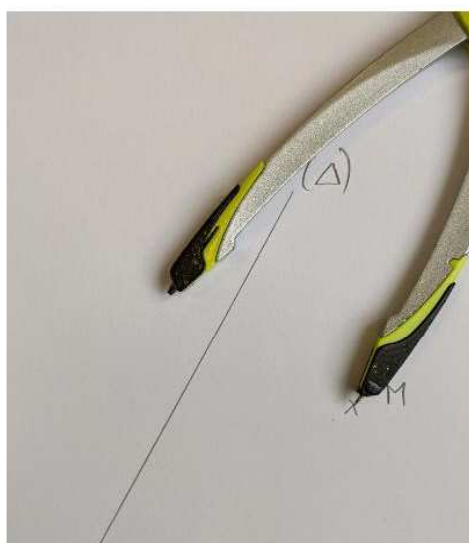


II. Construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'aide du compas :

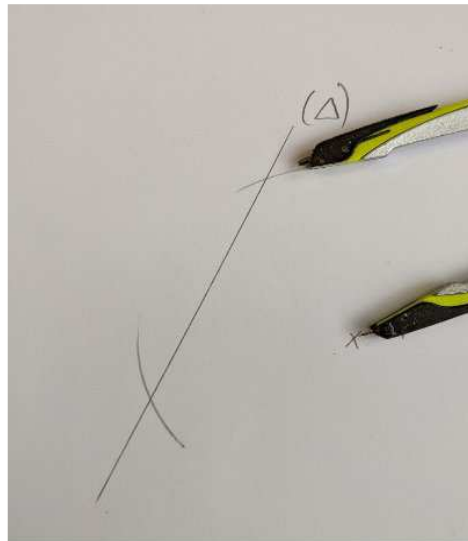
On veut construire M' le symétrique de M par rapport à la droite (Δ) :



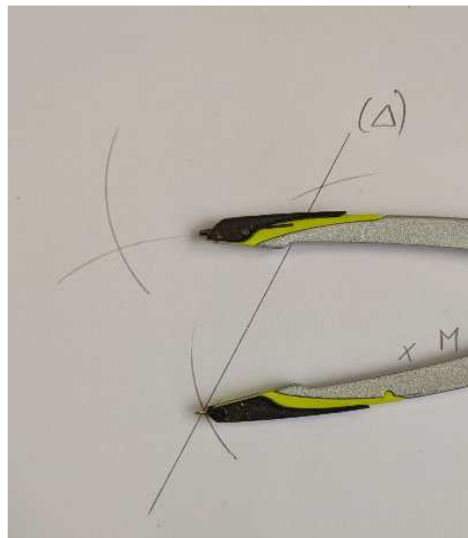
On prend le compas et en pointant sur M on prend un écartement assez grand pour pouvoir couper la droite en deux endroits. On gardera cet écartement pendant toute la manipulation :



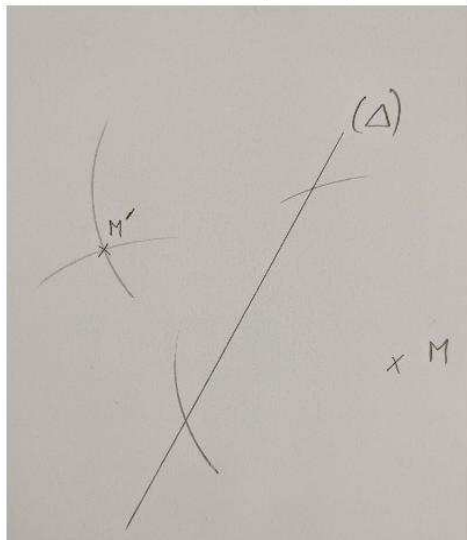
On trace alors deux arcs de cercle qui coupent la droite, qui nous permet d'obtenir deux points d'intersection :



Maintenant en gardant toujours le même écartement on pointe successivement sur ces deux points d'intersection et on fait deux arcs de cercle qui se coupent de l'autre côté de la droite :

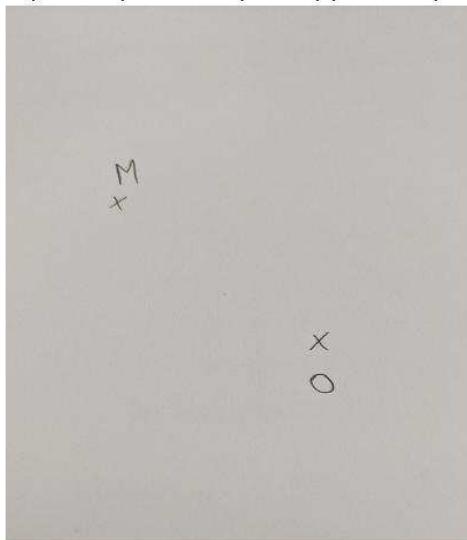


C'est à cet endroit que nous trouvons M' le symétrique de M par rapport à la droite (Δ) :



III. Construction du symétrique d'un point par rapport à un point à la règle graduée :

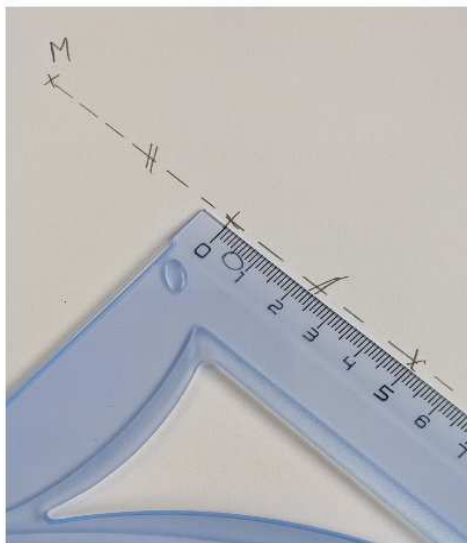
On veut construire M' le symétrique de M par rapport au point O :



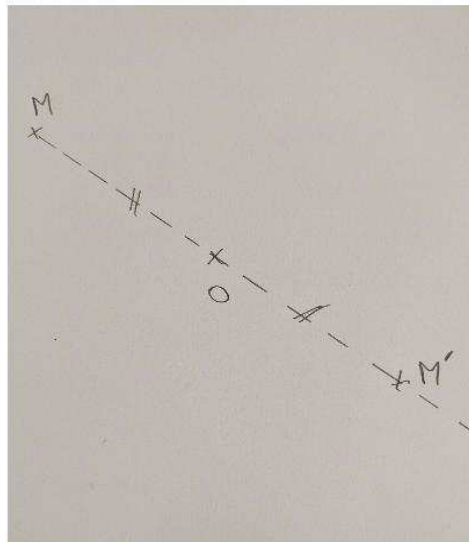
On prend la règle et on trace la demi-droite $[MO)$ d'origine M passant par O :



On mesure maintenant la distance MO et on reporte de l'autre côté du point O sur la droite tracée :



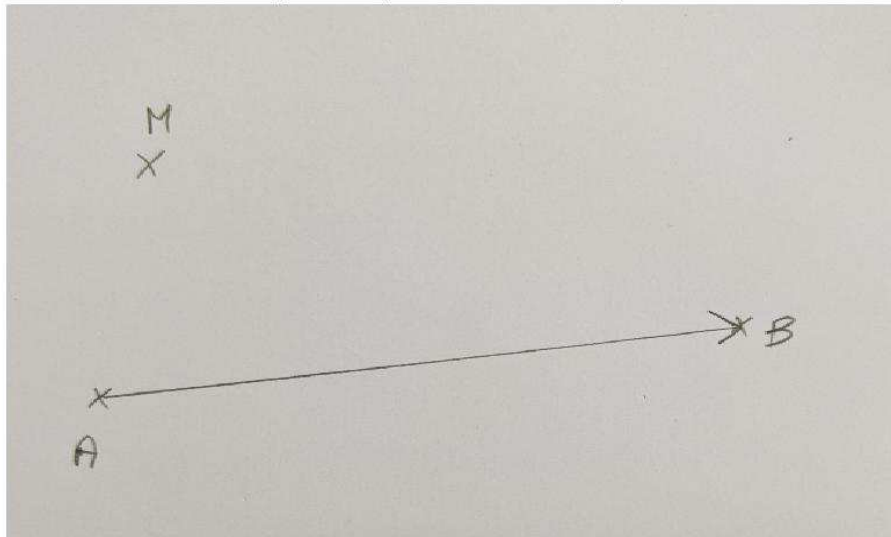
C'est à cet endroit que nous trouvons M' le symétrique de M par rapport au point O :



(On peut le vérifier en voyant que O est le milieu de $[MM']$.)

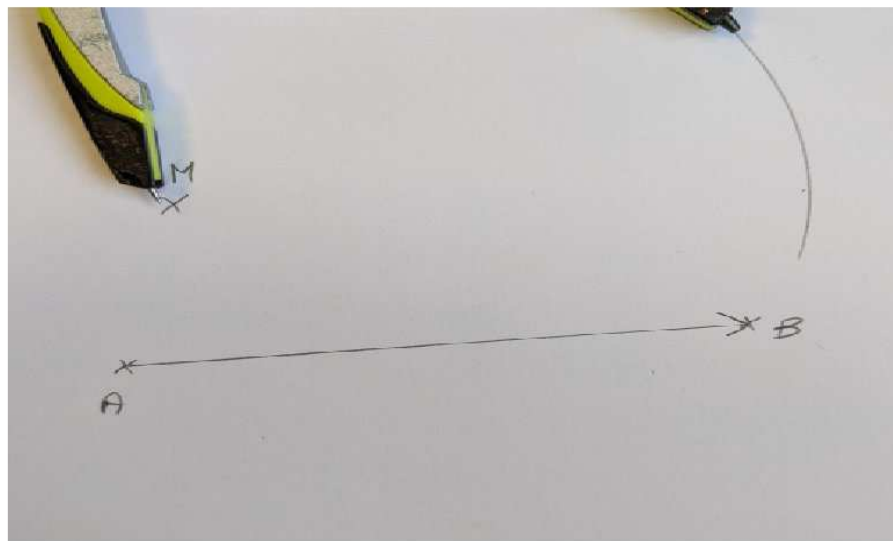
IV. Construction de l'image d'un point par une translation à l'aide du compas :

On veut construire M' l'image de M par la translation qui transforme A en B :

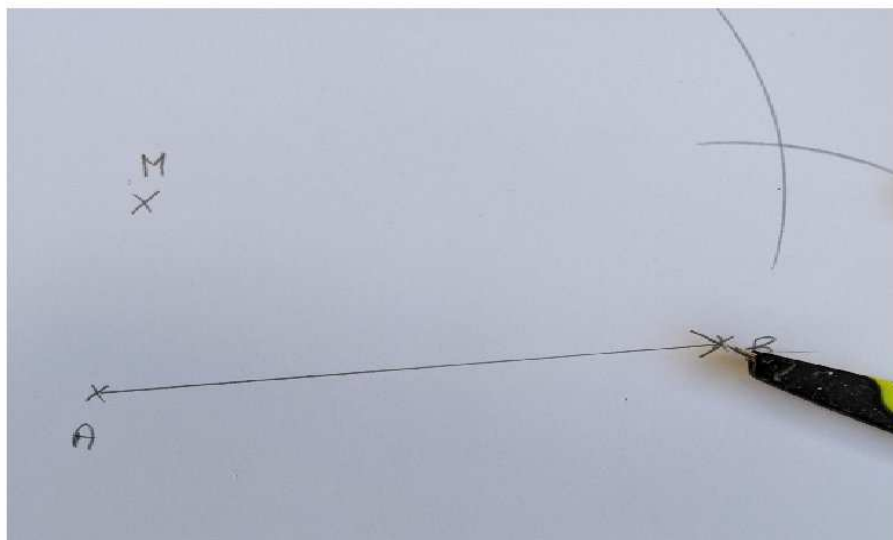


(On a symbolisé cette translation par une flèche qu'on appelle vecteur en mathématiques.)

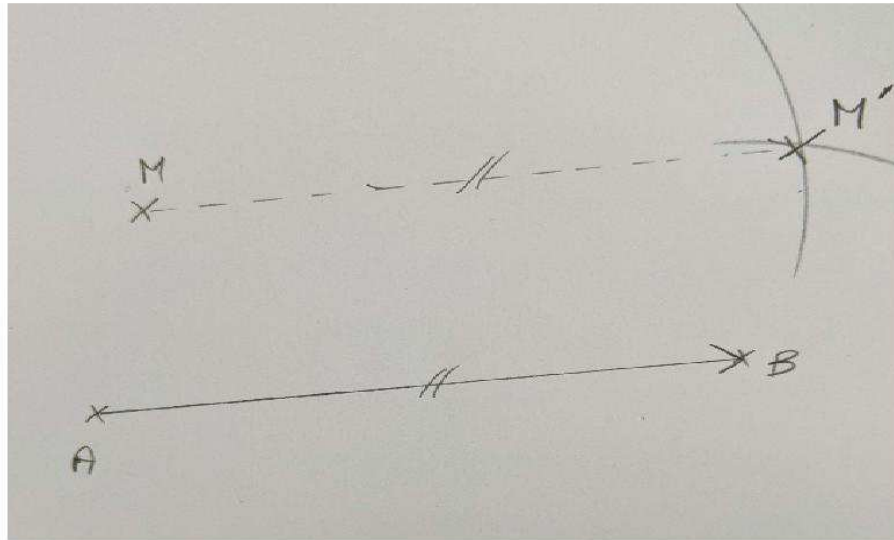
On prend l'écartement AB au compas et en pointant sur M on fait un arc de cercle dans le secteur où devra se trouver M' :



On prend maintenant l'écartement MA au compas et en pointant sur B on trace un arc de cercle qui coupe le précédent :



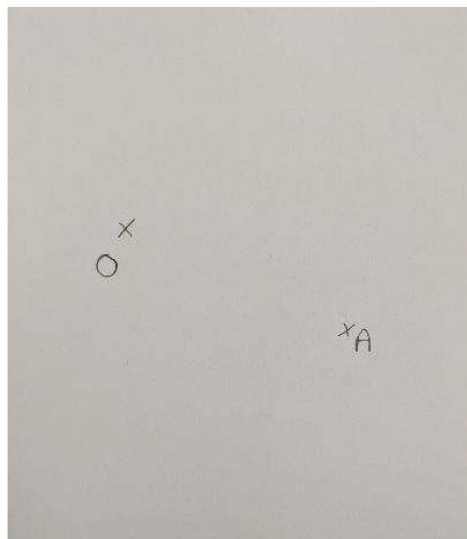
A l'intersection des deux arcs de cercle nous trouvons M' l'image de M par la translation qui transforme A en B :



(On peut le vérifier en remarquant que pour aller de M à M' on se déplace parallèlement à (AB) , de la même longueur que AB et dans le même sens que pour aller de A vers B . On peut aussi remarquer que $ABM'M$ est bien un parallélogramme.)

V. Construction de l'image d'un point par une rotation à l'aide de la règle graduée et du rapporteur :

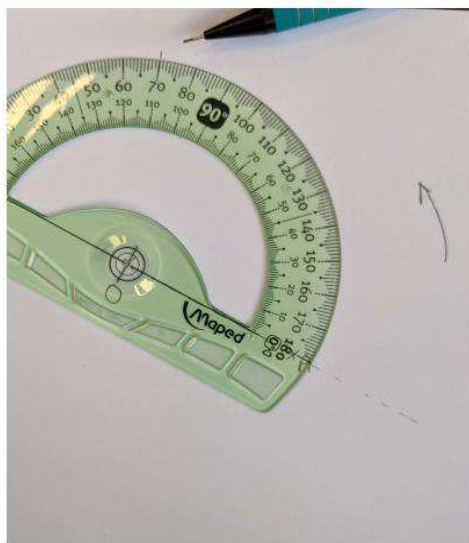
On veut construire A' l'image de A par la rotation de centre O , d'angle 110° dans le sens direct :



On trace d'abord la demi-droite [OA) :
(On a aussi indiqué par une flèche le sens dans lequel on tourne avec cette rotation : Le sens direct, appelé aussi sens anti horaire ou sens trigonométrique.)



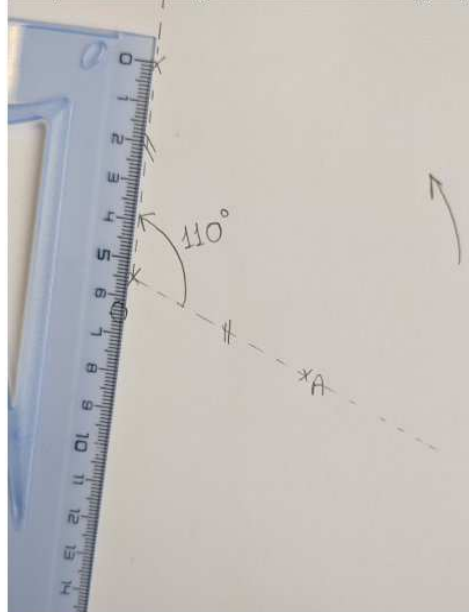
On prend son rapporteur de sorte qu'on puisse mesurer un angle en tournant dans le sens de la rotation donnée par rapport à la demi-droite [OA) et on place à 110° une petite marque :



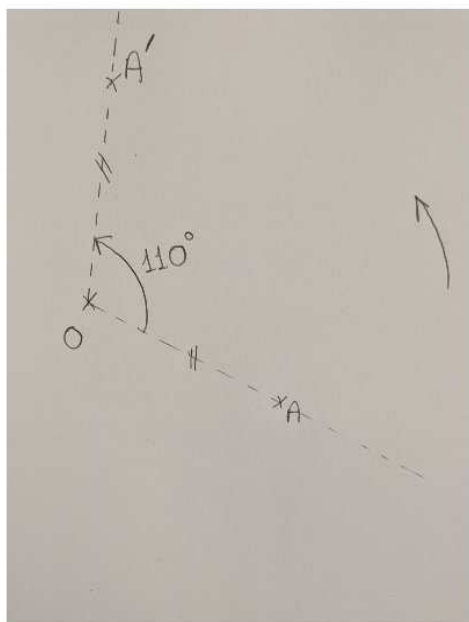
On trace la demi-droite d'origine O passant par cette petite marque :



On a ainsi obtenu un angle de 110° en tournant dans le bon sens. Sur la demi-droite qu'on vient de tracer on reporte la longueur OA à la règle graduée :



A cet emplacement se trouvera alors A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 110° dans le sens direct :



VI. Construction de l'image d'un point par une homothétie à l'aide d'une règle graduée :

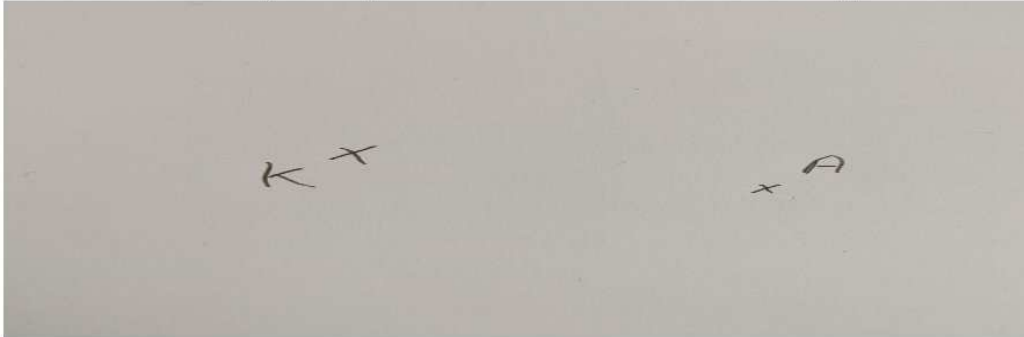
Pour les homothéties, qui sont un peu plus problématiques souvent pour les constructions, je vous propose quatre constructions possibles selon que :

- le rapport (sans son signe) est supérieur à 1 ou compris entre 0 et 1
- le rapport est positif ou négatif

Car (voir la partie sur les Homothéties) suivant que le rapport est négatif ou pas il y aura un demi-tour à effectuer ou pas, et suivant que le rapport (sans son signe) est plus grand que 1 ou compris entre 0 et 1 il y aura un agrandissement des dimensions ou une réduction des dimensions.

1) Premier cas : rapport positif et agrandissement :

On veut construire l'image de A par l'homothétie de centre K et de rapport 3 :



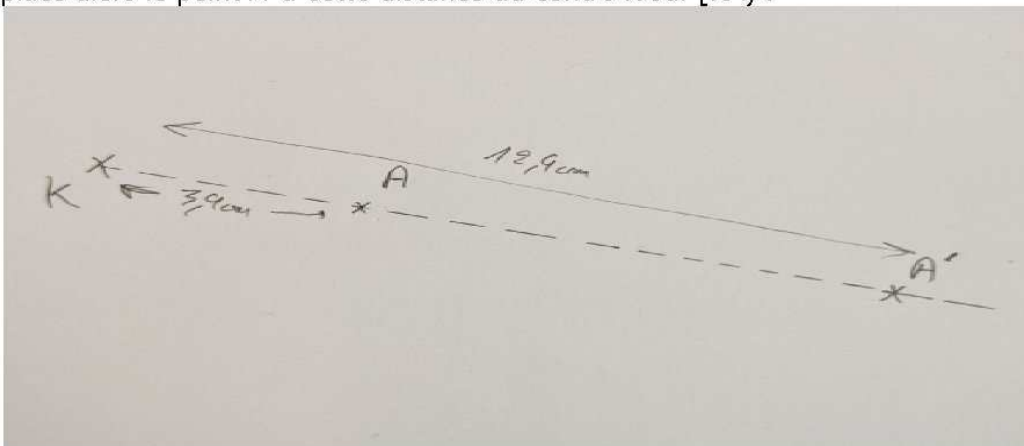
Comme le rapport est positif, on trace la demi-droite d'origine K passant par A :



On mesure KA (ici $KA = 3,4 \text{ cm}$)

On aura alors $KA' = KA \times 3 = 3,4 \times 3 = 10,2 \text{ cm}$

On place alors le point A' à cette distance du centre K sur [KA) :

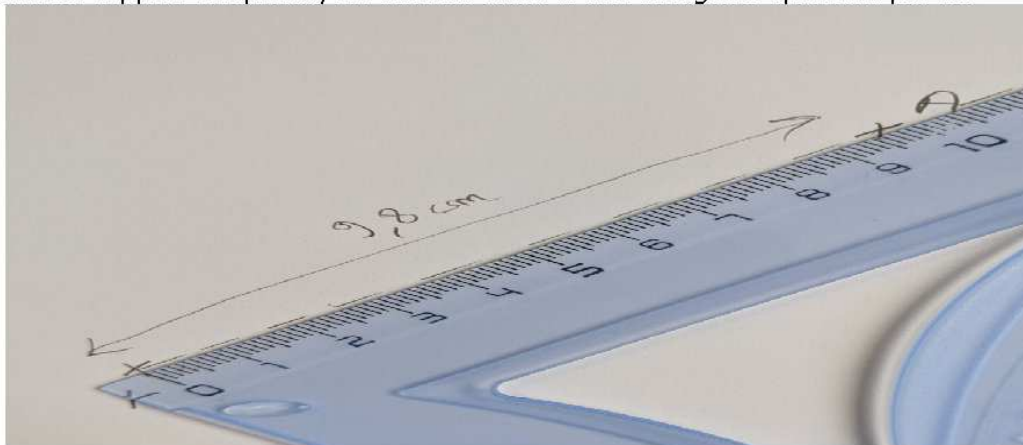


2) Deuxième cas : rapport positif et réduction :

On veut construire l'image de A par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{4}$:



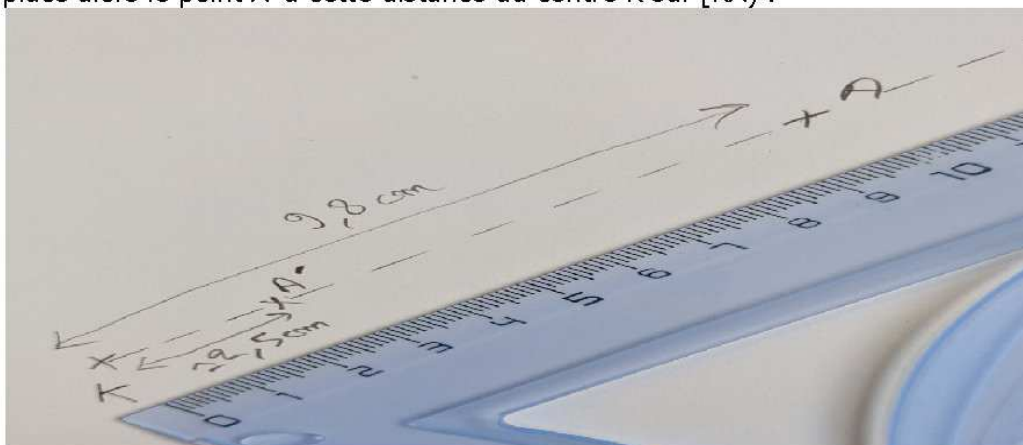
Comme le rapport est positif, on trace la demi-droite d'origine K passant par A :



On mesure KA (ici $KA = 9,8 \text{ cm}$)

On aura alors $KA' = KA \times \frac{1}{4} = 9,8 \times \frac{1}{4} \approx 2,5 \text{ cm}$

On place alors le point A' à cette distance du centre K sur [KA) :

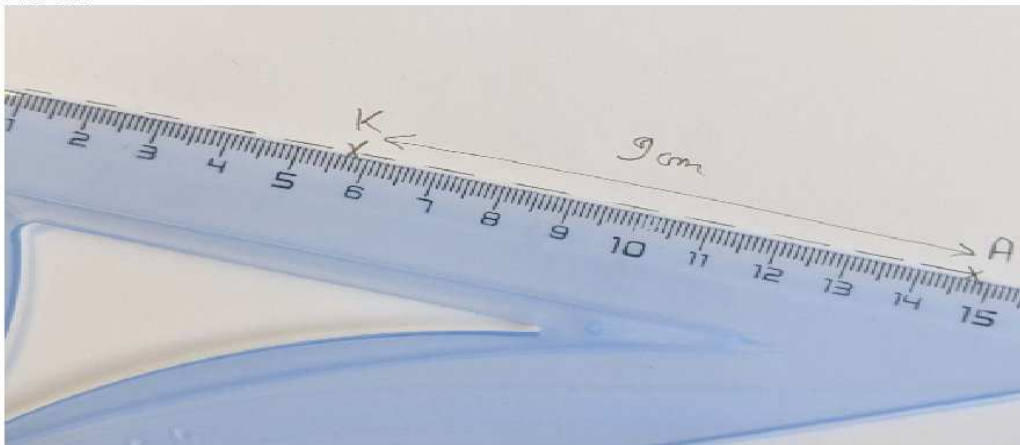


3) Troisième cas : rapport négatif et réduction :

On veut construire l'image de A par l'homothétie de centre K et de rapport $-\frac{1}{3}$:



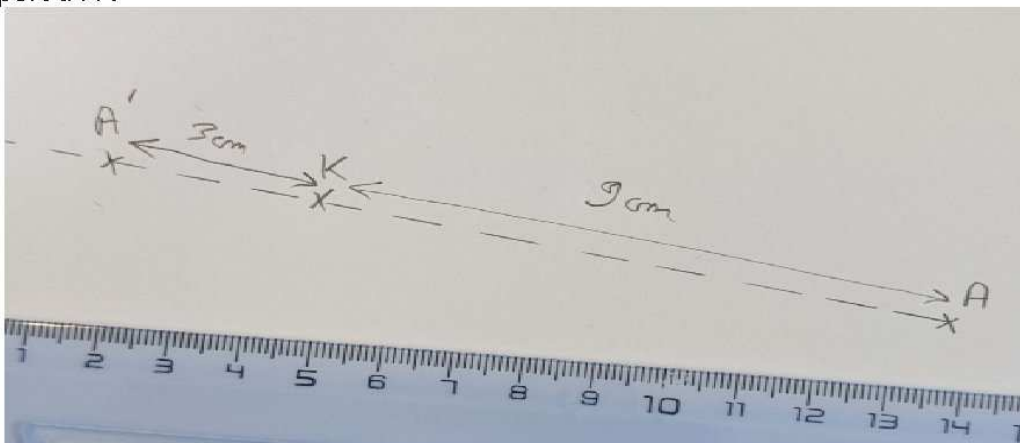
Comme le rapport est négatif, on trace la demi-droite (KA) et on prolonge de l'autre côté de K :



On mesure KA (ici $KA = 9 \text{ cm}$)

On aura alors $KA' = KA \times \frac{1}{3} = 9 \times \frac{1}{3} = 3 \text{ cm}$

On place alors le point A' à cette distance du centre K sur (KA) de l'autre côté de K par rapport à A :



4) Quatrième cas : rapport négatif et agrandissement :

On veut construire l'image de A par l'homothétie de centre K et de rapport - 2 :



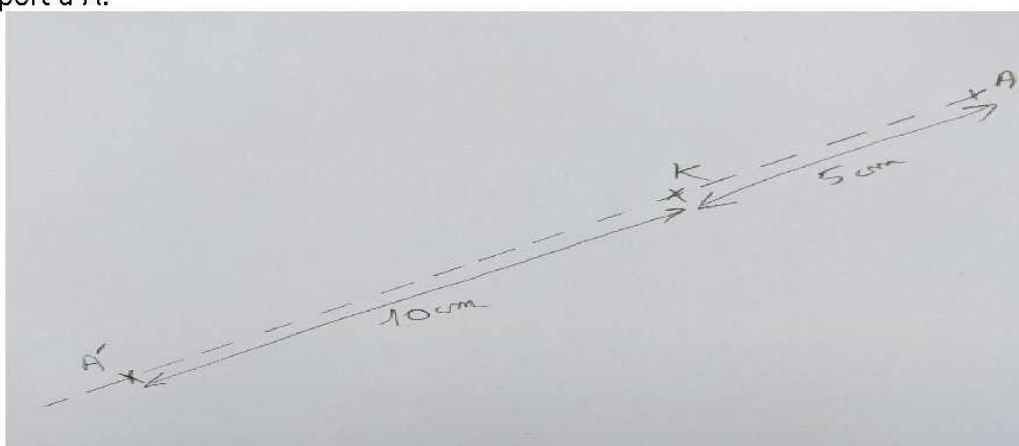
Comme le rapport est négatif, on trace la demi-droite (KA) et on prolonge de l'autre côté de K :



On mesure KA (ici $KA = 5 \text{ cm}$)

On aura alors $KA' = KA \times 2 = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}$

On place alors le point A' à cette distance du centre K sur (KA) de l'autre côté de K par rapport à A :



GEOMETRIE DANS L'ESPACE : SOLIDES & REPRESENTATIONS

Un peu de géométrie dans l'espace maintenant. Il est déjà important de comprendre comment représenter une construction en trois dimensions en seulement deux dimensions (comme sur ces pages.)

On représentera ces objets en trois dimensions (appelés solides) en perspective cavalière. Cette manière de représenter ces objets n'est pas totalement conforme à ce nous voyons en trois dimensions avec nos yeux, car il n'y a pas de point fuite, mais elle est plus pratique car tout ce qui est parallèle dans la réalité sera aussi parallèle sur notre représentation.

Je précise que même si nous allons utiliser la perspective cavalière il est inutile d'aller chercher votre cheval... Enfin pour ceux qui en ont...

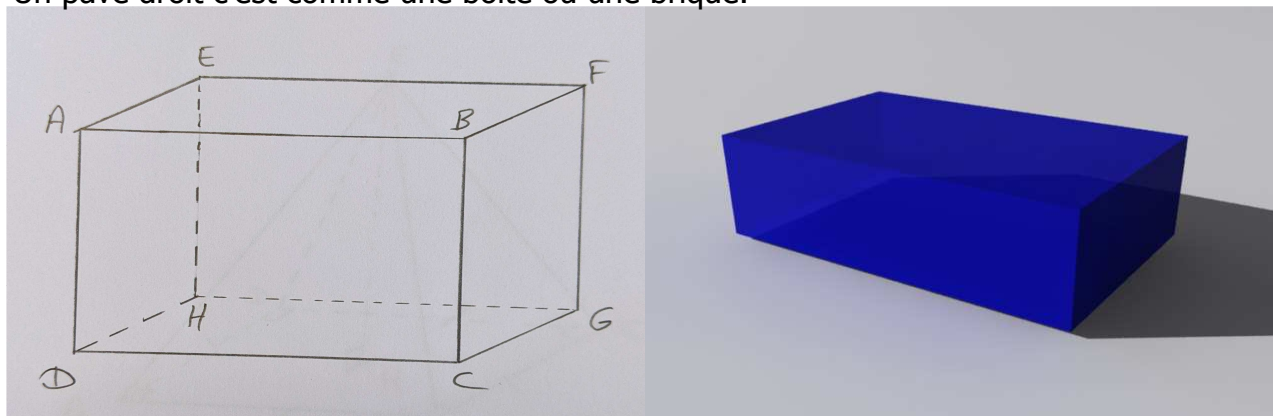
I. Les solides à connaître :

Pour chacun des solides que vous devez connaître, je vous donne la représentation en perspective cavalière (que vous devez connaître) et une représentation en vraie 3D.

1) Le pavé droit ou parallélépipède rectangle :

Alors déjà écrivez plutôt pavé droit car à moins de jouer au scrabble régulièrement vous risquez de mal l'écrire sous son autre nom.

Un pavé droit c'est comme une boîte ou une brique.



Le polyèdre (solide à plusieurs faces) ABCDEFGH est un pavé droit. Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont ses sommets.

Il possède 6 faces qui sont rectangulaires.

Ses faces opposées sont parallèles et identiques.

Notez qu'on donne son nom en nommant une face (ABCD) puis en nommant la face opposée de la même façon que pour la première face citée (EFGH car A correspond à E, B correspond à F, etc.)

Les segments délimitant chaque face sont les arêtes du pavé droit (on ne parle pas de côté pour un solide, mais uniquement de sommets, d'arêtes et de faces.)

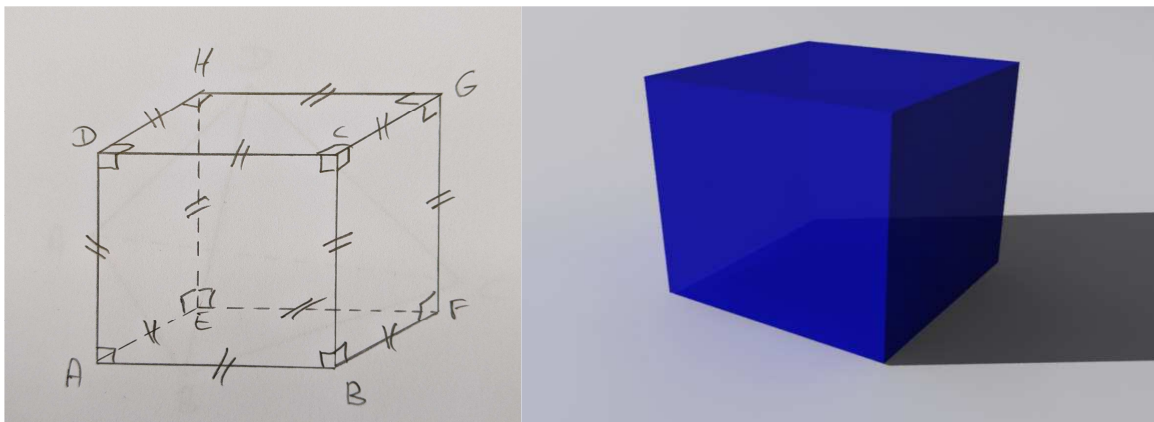
Les arêtes [AD], [BC], [EH] et [FG] sont perpendiculaires au "sol", c'est à dire au rectangle DCGH.

On voit aussi, par exemple, que les arêtes [AE] et [BF] sont parallèles.

Il est surtout important d'arriver à comprendre ce qui est parallèle ou perpendiculaire en géométrie dans l'espace, car vous serez amenés à utiliser des théorèmes déjà connus (Pythagore, etc.) en deux dimensions. (Voir le chapitre suivant...)

2) Le cube :

Rien de plus classique qu'un cube. C'est pareil qu'un pavé droit mais les 6 faces ne sont plus des rectangles mais des carrés identiques :



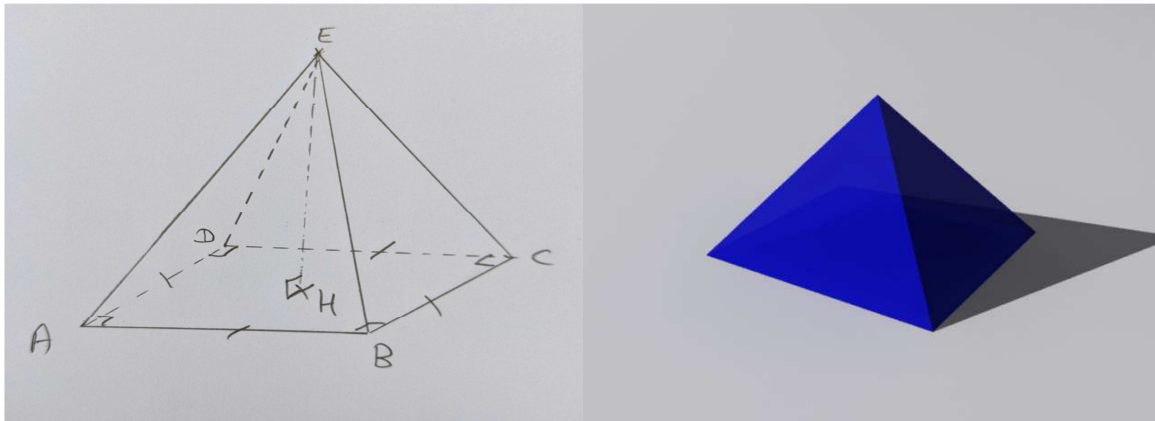
Quelques précisions sur la façon dont on représente les solides. On trace en plein les arêtes visibles, et en pointillés les arêtes cachées.

Sur ce magnifique dessin du cube, que l'artiste que je suis a particulièrement soigné, je vous ai mis les petits carrés qui signifient qu'il y a des angles droits. Ils ne sont pas tous mis mais j'espère que vous arrivez à vous représenter les arêtes perpendiculaires entre elles ou perpendiculaires à une face.

Comme en deux dimensions, on peut coder les arêtes de même longueur, ce que j'ai fait encore une fois de par ma grande générosité vis à vis de vous...

3) La pyramide :

Allez, je vous emmène en Egypte voir les pyramides.



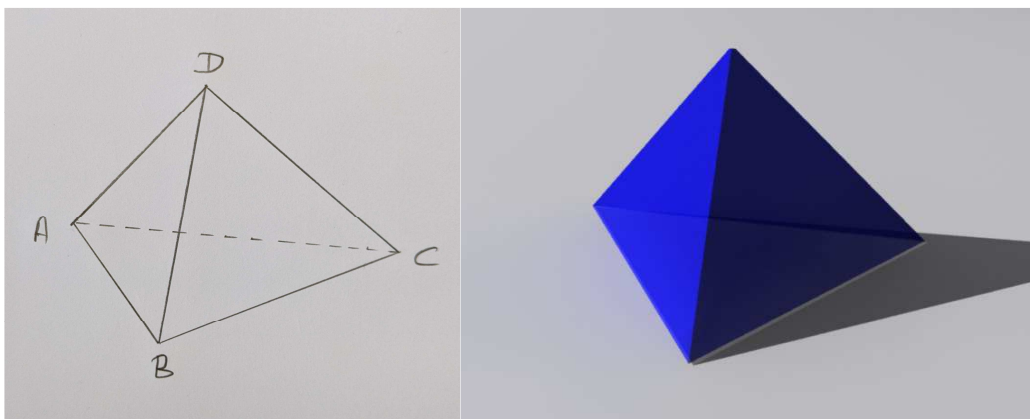
Alors une pyramide c'est simple à imaginer : on part d'un polygone (figure à plusieurs côtés) sur le "sol", on place un sommet au dessus du sol et on relie ce sommet à chaque sommet du polygone.

Sur cet exemple je vous ai représenté ABCDE une pyramide à base carrée (on voit les 4 côtés égaux et les 4 angles droits.)

Le point H est à la "verticale" du sommet E. Le segment [EH] est donc perpendiculaire à la face ABCD. Sa longueur correspond donc à la hauteur de la pyramide.

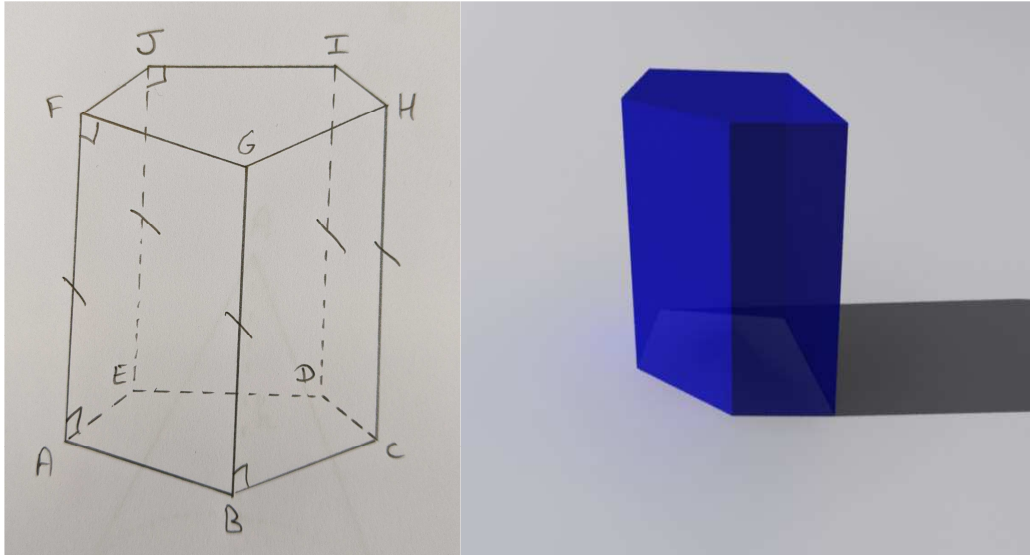
4) Le tétraèdre :

C'est une pyramide particulière. En effet le tétraèdre est une pyramide dont la base est un triangle équilatéral et dont 3 autres faces sont des triangles équilatéraux. Bref, il a 4 faces et ces 4 faces sont des triangles équilatéraux identiques.



5) Le prisme droit :

Pour obtenir un prisme droit c'est simple : on part d'un polygone sur "le sol" et on extrude cette face "vers le haut", c'est à dire qu'on lui donne une hauteur.

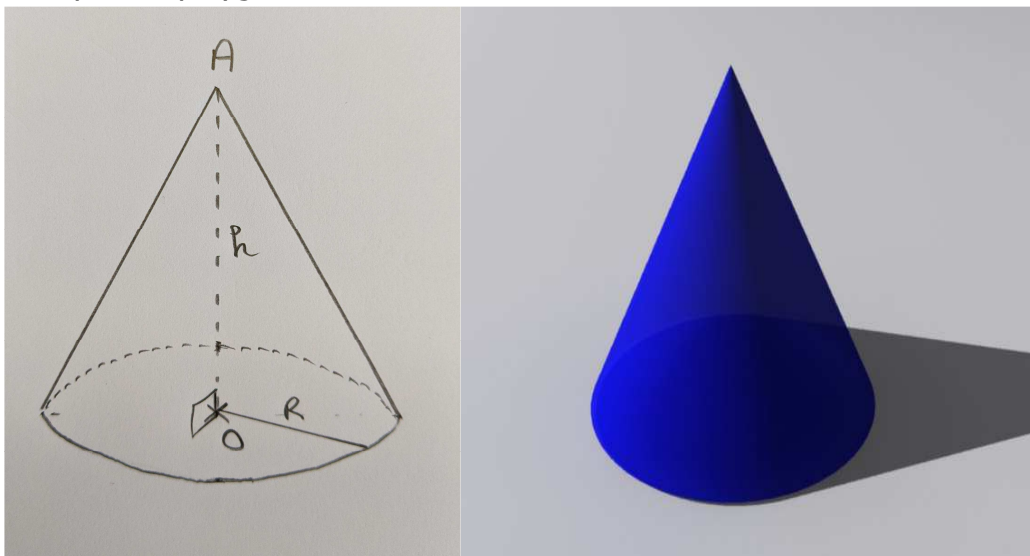


Ici je vous ai représenté un prisme droit à base hexagonale, c'est à dire que la face "au sol" ABCDE est un hexagone (polygone à 6 côtés.)

Les arêtes [AF], [GB], etc. sont perpendiculaires à cette face (et au sol) et ont la même longueur.

6) Le cône de révolution :

Un cône de révolution est comme une pyramide, mais la face au sol est un disque et non pas un polygone :

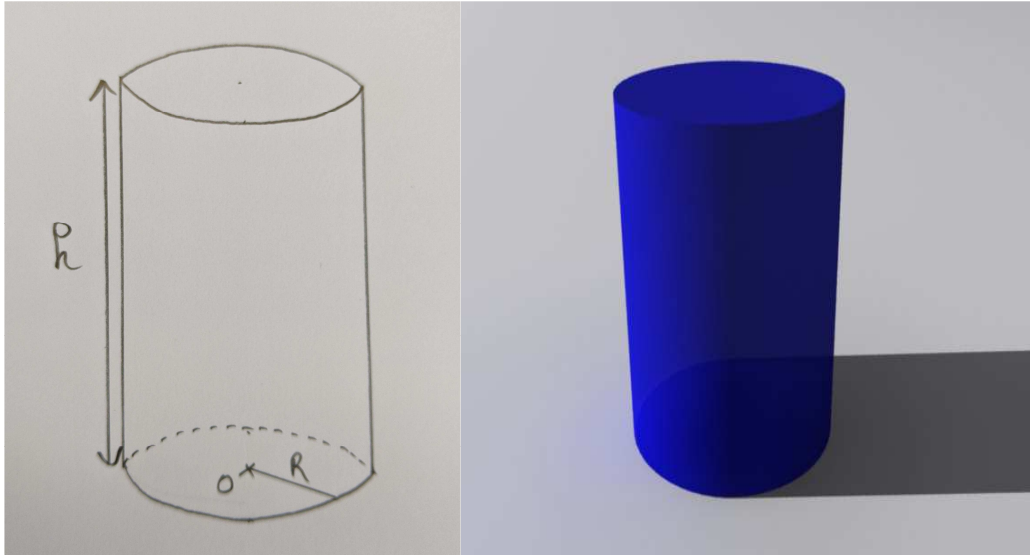


Sur cette figure la base du cône est un disque de centre O et de rayon R.

Le sommet du cône est à "la verticale" du centre du disque, c'est à dire que [AO] est perpendiculaire au disque de centre O et de rayon R.

7) Le cylindre :

Un cylindre est un peu comme un prisme droit, sauf que la base n'est pas un polygone mais un disque:



Sur cette figure le cylindre a pour base un disque de centre O est de rayon R .

La hauteur (ou longueur) du cylindre est h .

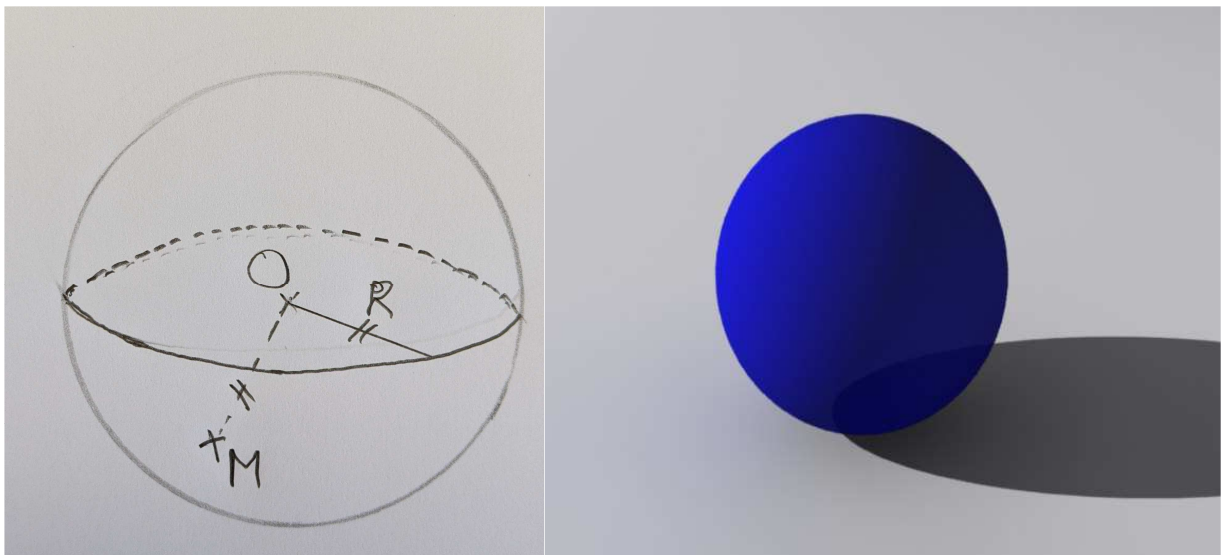
Je ne l'ai pas marqué mais le centre du disque "en haut" a son centre à la verticale de O bien entendu...

8) La sphère (et la boule) :

Elle correspond à notre cercle en deux dimensions.

A noter qu'une sphère correspond à l'enveloppe (ou à la surface) et qu'une boule correspond à une sphère et à tout ce qui se trouve à l'intérieur.

C'est la même différence qu'entre un cercle et un disque.



Sur cette figure on a représenté une sphère (ou une boule) de centre O et de rayon R.

On a aussi représenté l'intersection d'un plan "horizontal" passant par O avec cette sphère. On obtient ainsi un cercle de centre O et de rayon R. (C'est comme l'équateur pour la planète Terre.)

Le point M représenté ici est sur la sphère car $OM = R$.

Tous les points de la sphère sont effectivement situés à la même distance R du centre O.

II. Les patrons :

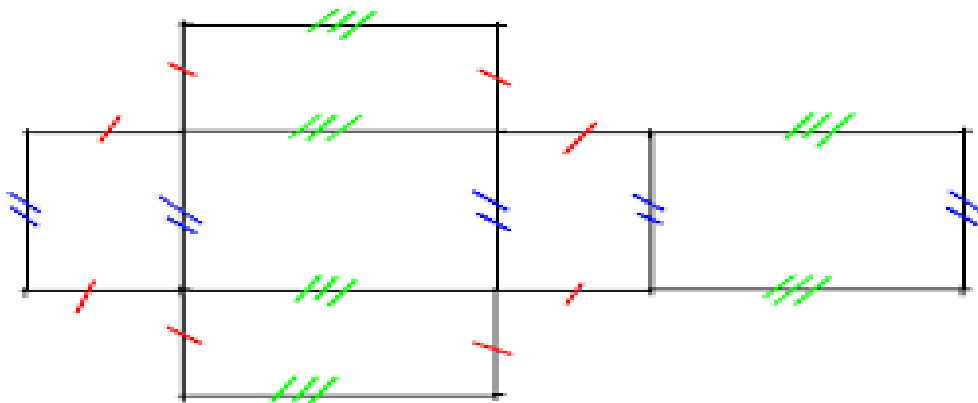
Je sais, vous vous dites "les patrons les patrons oui mais il n'y a qu'un seul patron!" et je vous remercie de penser à moi ainsi, même si je trouve ça normal.

En fait, je parle ici des patrons des solides.

Alors, et normalement vous le savez, un patron d'un solide est simplement une figure à plat qu'on découpe et qu'on colle pour obtenir ce solide.

Je vous donne quelques exemples de patrons pour que vous puissiez comprendre comment on procède si jamais vous devez en produire un.

1) Patron d'un pavé droit :



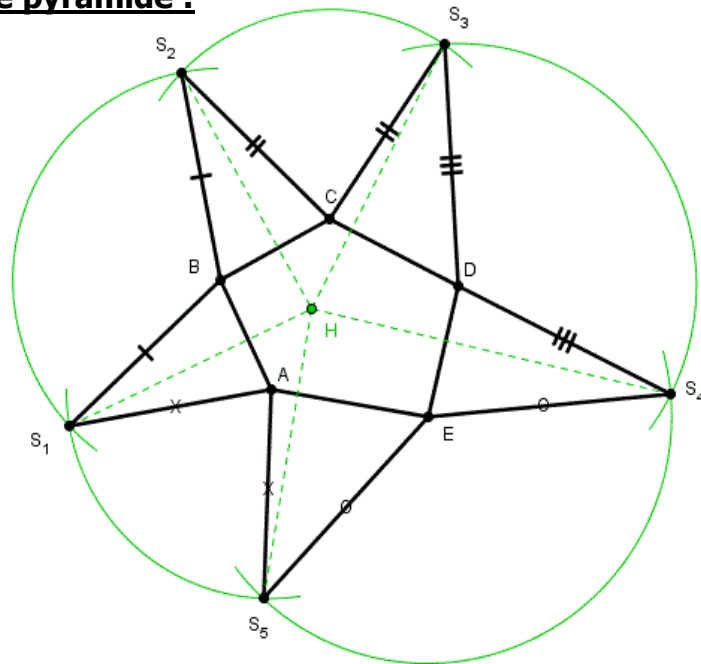
Il est donc constitué de 6 rectangles qui sont 2 à 2 identiques. Il y a des angles droits partout et il ne faut pas oublier les "languettes" pour le collage si nécessaire...

Pour le cube on obtient le même patron mais les 6 faces sont des carrés identiques alors.

Remarque :

Il y a d'autres patrons possibles pour le pavé droit, il faut juste comprendre quelles sont les arêtes qui vont se retrouver superposées ensemble pour le réussir.

2) Patron d'une pyramide :



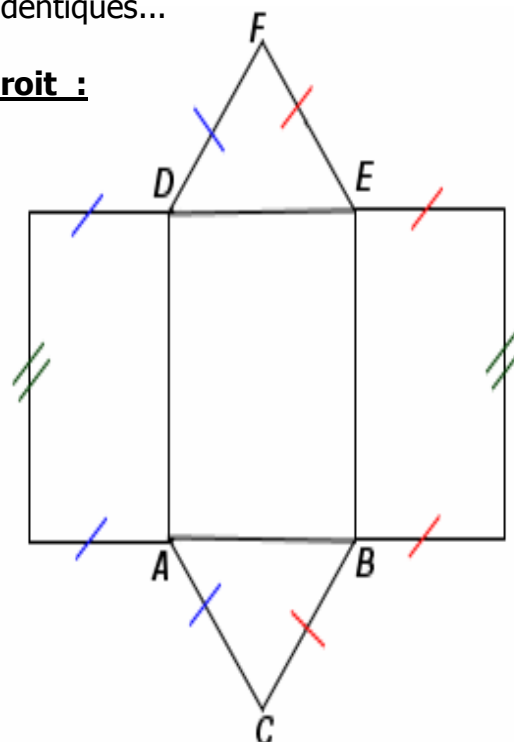
Voici le patron d'une pyramide à base hexagonale (comme dans l'exemple donné dans la partie précédente.)

Le plus simple est, comme ici, de commencer par dessiner la base puis d'ajouter les faces triangulaires en remarquant les arêtes qui vont se superposer.

Le plus dur est de trouver la longueur des arêtes qui rejoignent le sommet... Mais avec les bonnes indications et un peu de Pythagore on peut trouver...

Pour le tétraèdre c'est plus simple car toutes les faces (il y en a 4, je le rappelle...) sont des triangles équilatéraux identiques...

3) Patron d'un prisme droit :



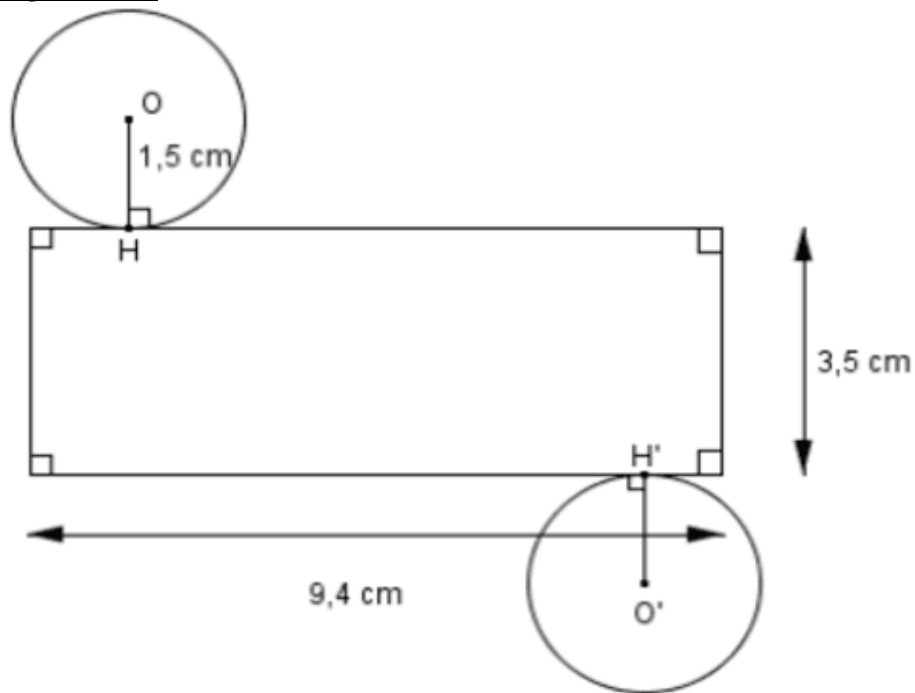
Voici le patron d'un prisme droit à base triangulaire (la base est même un triangle isocèle ici.)

C'est assez simple à produire : les faces rectangulaires (celles qui seront "verticales" dans le solide) sont des rectangles. Elles sont placées l'une après l'autre (ça forme un grand rectangle.)

Il n'y a plus qu'à ajouter les deux faces "horizontales", les bases.

Avec les indications de longueur données je pense que vous comprenez le principe.

4) Patron d'un cylindre :



Voici le patron d'une cylindre dont la base est un disque de 1,5 cm de rayon.

La hauteur du cylindre est de 3,5 cm.

Le grand rectangle va être enroulé "autour" des bases, il va suivre les contours des deux disques. Sa longueur est de 9,4 cm. Cette mesure ne tombe pas du ciel :

Sachant que le disque a pour rayon 1,5 cm, le périmètre de ce disque est :

$$2 \times \pi \times R \approx 2 \times 3,14 \times 1,5 \approx 9,4 \text{ (cm)}$$

La longueur du grand rectangle est donc égale au périmètre des deux disques...

Remarque :

Je ne vous donne pas de patron pour le cône... vous pouvez en trouver sur le net mais ça n'a pas beaucoup d'intérêt pour vous...

Essayez de trouver aussi le patron d'une sphère... Vous m'en direz des nouvelles !

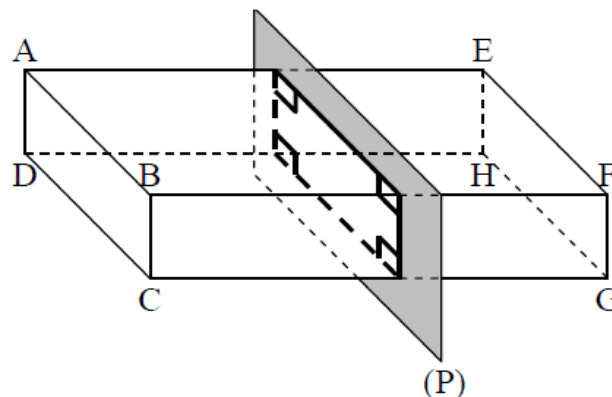
III. Les sections de solides :

Lorsqu'on coupe un solide suivant un plan, on obtient des figures géométriques planes qu'il faut savoir comprendre et analyser. Là aussi je vous montre quelques sections à connaître mais qui sont simples et logiques à comprendre :

1) Section d'un pavé droit par un plan :

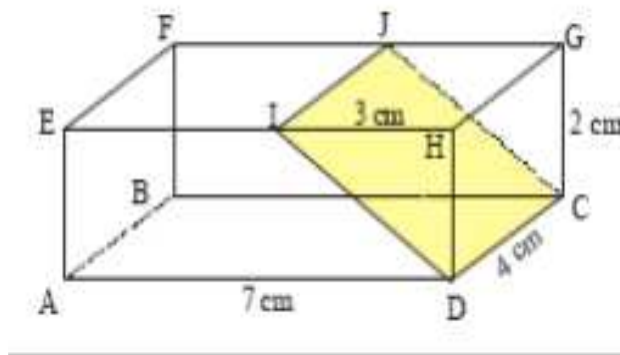
Il y a deux cas possibles :

Soit on coupe un pavé droit par un plan parallèle à une de ses faces (Le plan (P) est le rectangle grisé. La section obtenue est le polygone en gras.)



Dans ce cas de figure, on remarque que le polygone obtenu est un rectangle, et que ce rectangle est identique aux deux rectangles composant les faces du solide parallèles à ce plan.

Soit on coupe un pavé droit par un plan non parallèle à une de ses faces, et on obtient alors (pour vous car on pourrait obtenir autre chose en coupant un peu différemment) aussi un rectangle :



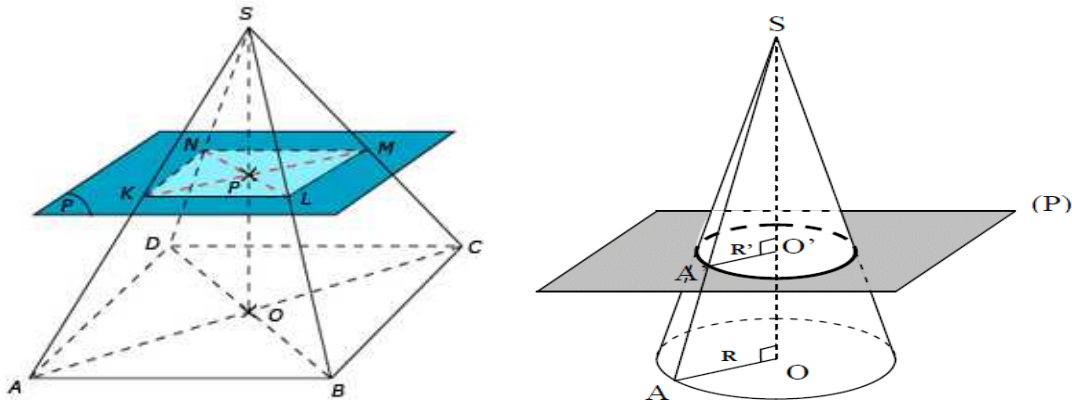
Le quadrilatère obtenu (en jaune) IJCD est un rectangle (j'espère que vous le visualisez.) Une de ses longueurs est 4 cm (on le voit facilement sur le dessin.) L'autre mesure ne peut se lire directement sur le dessin. Mais si on connaît par

exemple JG ou EI, un peu de Pythagore nous permettra de trouver la mesure ID par exemple...

Remarque :

C'est le même principe aussi pour les sections de cube.

2) Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base :



Dans ce cas de figure, on remarque que pour la pyramide on obtient un polygone qui est une réduction de la base.

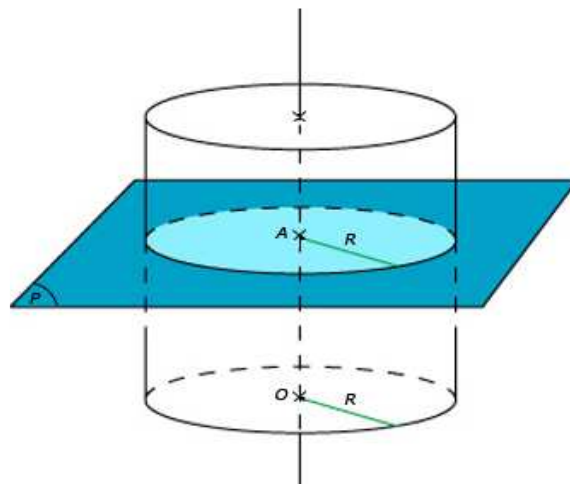
Et pour le cône on obtient un disque qui est une réduction du disque de base.

Avec du Pythagore ou du Thalès il est tout à fait possible de retrouver les dimensions du polygone obtenu ou du disque obtenu.

3) Section d'un cylindre :

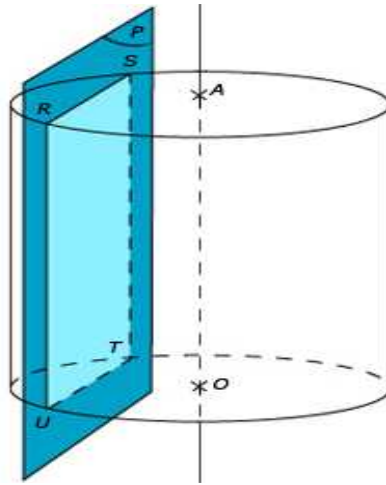
Là aussi, comme pour les pavés droits, il y a deux cas possibles à connaître :

Soit on coupe le cylindre par un plan parallèle à la base :



On remarque que la section obtenue est un disque identique à la base...

Soit on coupe le cylindre par un plan parallèle à sa longueur :



Dans ce cas on obtient... un rectangle !

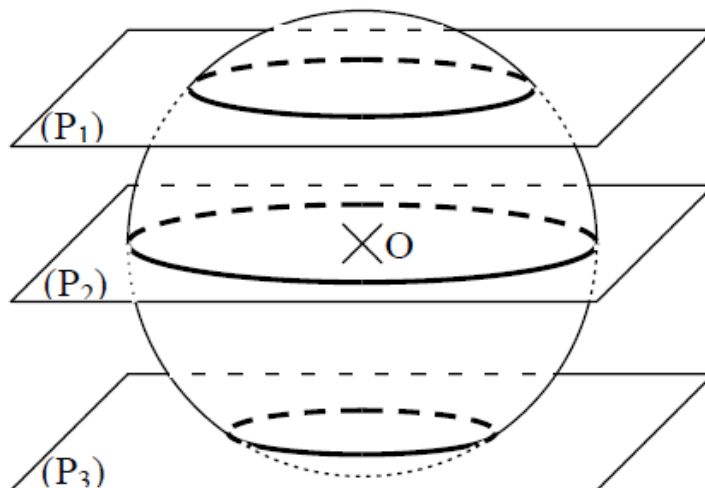
Dans cet exemple, RSTU est un rectangle et $RU = AO =$ hauteur du cylindre

La largeur de ce rectangle ne se trouve pas directement, mais avec un peu de trigonométrie ou du Pythagore on peut la retrouver.

Remarque :

Si on coupe par un plan contenant le centre du disque de la base, on obtient un rectangle ayant pour longueur la hauteur du cylindre et pour largeur le diamètre du disque...

4) Section d'une sphère :



Quelque soit le plan qui coupe la sphère, on obtiendra un cercle (sauf si le plan ne coupe pas la sphère et dans ce cas on obtient... rien ; ou sauf si le cercle coupe la sphère en un seul point... On dira que le plan est tangent à la sphère...)

Par contre si le plan passe par le centre de la sphère, on obtient un cercle qui aura le même rayon que la sphère elle-même... Evident non ?

Remarque :

Essayez de bien visualiser chacun des dessins que je vous ai donnés ici. Il faut vous habituer à voir sur un plan ce qui se passe en 3 dimensions. Si vous avez compris chaque dessin et chaque section par un plan vous devriez ne pas avoir de difficultés à retrouver des rectangles, des angles droits, des cercles, etc. dans n'importe quel exercice de géométrie dans l'espace. Et vous devriez ainsi trouver de suite quels théorèmes vus en géométrie plane vous pouvez utiliser...

GEOMETRIE DANS L'ESPACE : VOLUMES & SURFACES

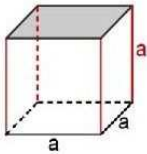
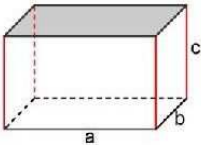
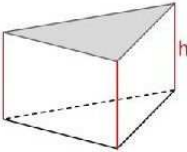
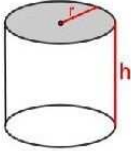
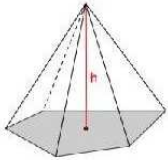
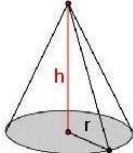
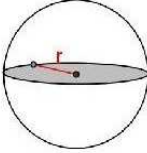
Maintenant que vous connaissez un peu plus les solides, voici les formules permettant de calculer :

- leur volume (leur contenance)
- leur surface (l'aire de leur contour)

I. Formules pour les volumes :

Voici les formules des solides vus précédemment.

Au brevet les formules "compliquées" sont souvent données, mais bon... les connaître peut éviter quelques désagréments... Essayez au moins de comprendre d'où elles viennent je vous l'explique en-dessous.

<u>CUBE</u>  Volume = a^3	<u>PAVÉ DROIT</u>  Volume = $a \times b \times c$	<u>PRISME</u>  Volume = Aire de la base $\times$ h	<u>CYLINDRE</u>  Volume = $\pi r^2 h$
<u>PYRAMIDE</u>  $V = \frac{\text{Aire de la base} \times h}{3}$		<u>CÔNE</u>  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$	
<u>SPHERE - BOULE</u>  Volume = $\frac{4}{3} \pi r^3$			

Pour le cube et le pavé droit c'est assez simple à comprendre :
on calcule longueur X largeur X profondeur

Pour le prisme et le cylindre, le principe est le même :
on calcule aire de la base X hauteur

Pour le cylindre, la base étant un disque, son aire est : $\pi \times R^2$
Donc le volume du cylindre est bien égal à $\pi \times R^2 \times h$

Pour la pyramide est le cône, là aussi c'est le même principe :

Dans les deux cas, on a une base et un sommet.

On utilise la même formule que pour un cylindre ou un prisme, mais on multiplie ensuite par $\frac{1}{3}$.

Je m'explique :

$$\begin{aligned}\text{volume d'une pyramide} &= \text{volume du prisme} \times \frac{1}{3} \\ &= \text{aire de la base} \times h \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\text{aire de la base} \times h}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume d'un cône} &= \text{volume du cylindre} \times \frac{1}{3} \\ &= \text{aire du disque} \times h \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}\end{aligned}$$

Pour la boule :

Retenez pour la formule qu'il y a du R^3 car on travaille en 3 dimensions, que on a du π comme dans n'importe quelle formule de calculs de périmètres ou d'aires avec des portions circulaires et qu'il y a un $\frac{4}{3}$

II. Formules pour les surfaces :

Pour les pavés droits :

Ajouter les aires des 6 faces qui sont des rectangles. Comme en plus elles sont deux par deux identiques il n'y aura que 3 aires de rectangles à calculer, à doubler et à ajouter.

Pour le cube :

Comme les 6 faces sont identiques et chaque face est un carré de longueur c , on a :

$$\textbf{Surface du cube} = 6c^2$$

Pour la sphère :

La formule est : ***Surface de la sphère = $4\pi R^2$***

Pour les prismes droits :

On calcule la surface de la base, qu'on doublera puisque on a deux bases identiques. Il reste à calculer la surface latérale, c'est à dire la surface de la partie qui joint les deux bases.

Son calcul est simple : ***Aire latérale = périmètre base X Hauteur***

On ajoute ça aux surfaces des deux bases et c'est terminé.

Pour le cylindre droit :

Comme un cylindre est un prisme à base circulaire, son aire latérale se calcule ainsi :

Aire latérale = 2 X π X R X hauteur

On ajoute l'aire des deux disques de base et c'est terminé.

Pour une pyramide ou un tétraèdre :

On ajoute l'aire de la base aux aires des faces triangulaires.

Pour le tétraèdre vu que les 4 faces sont identiques, on calcule l'aire d'une face triangulaire (et équilatérale) et on multiplie par 4...

GEOMETRIE DANS L'ESPACE : UTILISATION DES THEOREMES DE GEOMETRIE & DES FORMULES

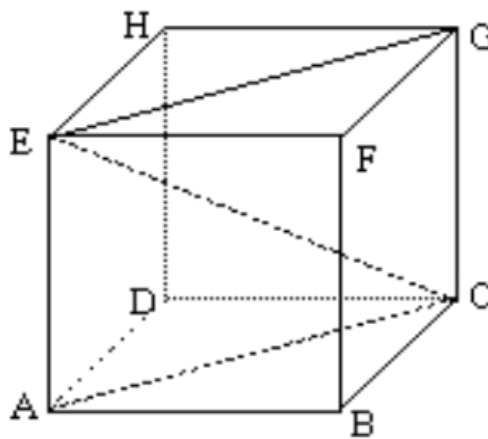
Il s'agit maintenant que vous connaissez les solides de les utiliser en géométrie. La plupart des exercices utilisent ces deux principes :

- Repérer des figures planes dans le solide pour pouvoir utiliser ce que vous connaissez déjà en géométrie (Thalès, Pythagore, formules trigonométriques, etc.)
- Calculer des volumes ou des surfaces avec les formules vues précédemment.

Je vous donne quelques exercices classiques sur la géométrie dans l'espace.

Exercice 1 :

On considère ce cube ABCDEFGH d'arête 5 cm :



- 1) Sans justifier donner la nature du triangle EFG.
- 2) Sans justifier donner la nature du triangle ECG.
- 3) Déterminer EG.
- 4) Déterminer EC.

Solution :

1) Le triangle EFG est un triangle isocèle rectangle en F.

2) Le triangle ECG est un triangle rectangle en G.

3) On sait que EFG est un triangle rectangle en F donc par le théorème de Pythagore on a :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

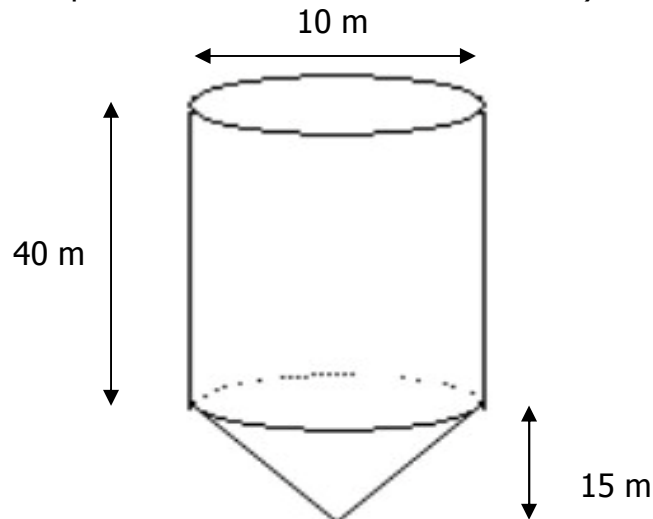
$$\begin{aligned}
 \text{d'où } EG^2 &= 5^2 + 5^2 \\
 \text{d'où } EG^2 &= 25 + 25 \\
 \text{d'où } EG^2 &= 50 \\
 \text{d'où } EG &= \sqrt{50} \approx \mathbf{7,07 \text{ (cm)}}
 \end{aligned}$$

4) On sait que ECG est rectangle en G donc par le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
 EC^2 &= EG^2 + GC^2 \\
 \text{d'où } EC^2 &= 50 + 5^2 & (\text{ On sait que } EG^2 = 50 \text{ par le calcul précédent}) \\
 \text{d'où } EC^2 &= 50 + 25 \\
 \text{d'où } EC^2 &= 75 \\
 \text{d'où } EC &= \sqrt{75} \approx \mathbf{8,66 \text{ (cm)}}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Un silo à céréales (à ne pas confondre avec un silo à billes...) a la forme suivante :



Il est donc constitué d'un cylindre de révolution et d'un cône ayant pour base le même disque de diamètre 10 m.

La hauteur du cylindre est de 40 m et celle du cône est de 15 m.

Déterminer le volume du silo.

Solution :

On cherche d'abord le volume du cylindre :

$$\text{Volume cylindre} = \pi \times R^2 \times h \approx 3,14 \times 5^2 \times 40 \approx 3,14 \times 25 \times 40 \approx 3140 \text{ (m}^3\text{)}$$

On cherche maintenant le volume du cône :

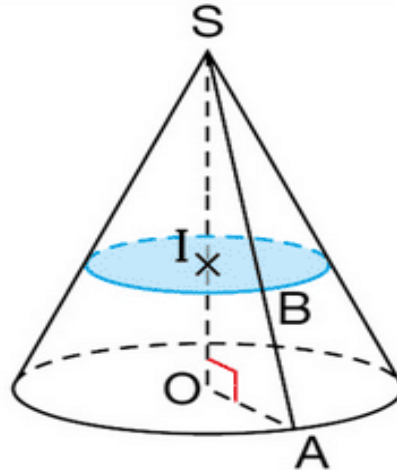
$$\text{Volume cône} = \frac{\pi \times R^2 \times h'}{3} \approx \frac{3,14 \times 25 \times 15}{3} \approx 392,5 \text{ (m}^3\text{)}$$

On cherche maintenant le volume du silo :

$$\text{Volume silo} = \text{Volume cylindre} + \text{Volume c\^one} \approx 3140 + 392,5 \approx \mathbf{3532,5 \text{ (m}^3\text{)}}$$

Exercice 3 :

On considère le c\^one ci-dessous de base le disque de centre O et de rayon OA et de sommet S :



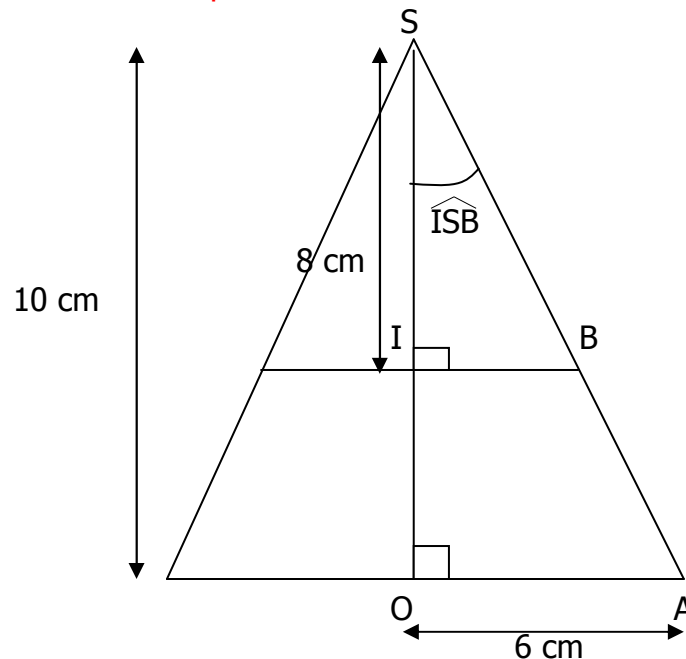
On a coupé le c\^one par un plan parallèle à la base. On obtient le disque bleu comme section.

On donne $OA = 6 \text{ cm}$, $OS = 10 \text{ cm}$ et $SI = 8 \text{ cm}$.

- 1) Déterminer le rayon du disque bleu.
- 2) Déterminer $\widehat{ISB}$.
- 3) Déterminer le volume du grand c\^one.
- 4) En déduire le volume du petit c\^one de base le disque de centre I et de rayon IB.

Solution :

- 1) Effectuons un dessin de profil de ce solide :



On sait que :

- Les points S, I et O sont alignés et distincts
- Les points S, B et A sont alignés et distincts
- (IB) // (OA)

Donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{SI}{SO} = \frac{SB}{SA} = \frac{IB}{OA}$

$$\text{d'où } \frac{8}{10} = \frac{SB}{SA} = \frac{IB}{6}$$

$$\text{On a donc : } \frac{IB}{6} = \frac{8}{10} \text{ d'où } IB = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{48}{10} = \mathbf{4,8 \text{ (cm)}}$$

2) On sait que le triangle ISB est rectangle en I.

$$\text{Donc on a : } \tan(\widehat{ISB}) = \frac{IB}{SI} \approx \frac{4,8}{8}$$

Grâce à la touche Arctan de la calculatrice on trouve $\widehat{ISB} \approx \mathbf{36,9^\circ}$

3) On utilise la formule du volume du cône :

$$\text{Volume du grand cône} = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} \approx \frac{3,14 \times 6^2 \times 10}{3} \approx \frac{3,14 \times 36 \times 10}{3} \approx \mathbf{376,8 \text{ (cm}^3\text{)}}$$

4) (On pourrait calculer directement le volume du petit cône avec la même formule, mais on va faire différemment)

$$\text{On a } \frac{SI}{SO} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Donc les dimensions du petit cône sont obtenus en multipliant par 0,8 les dimensions du grand cône (c'est donc une réduction du grand cône.)

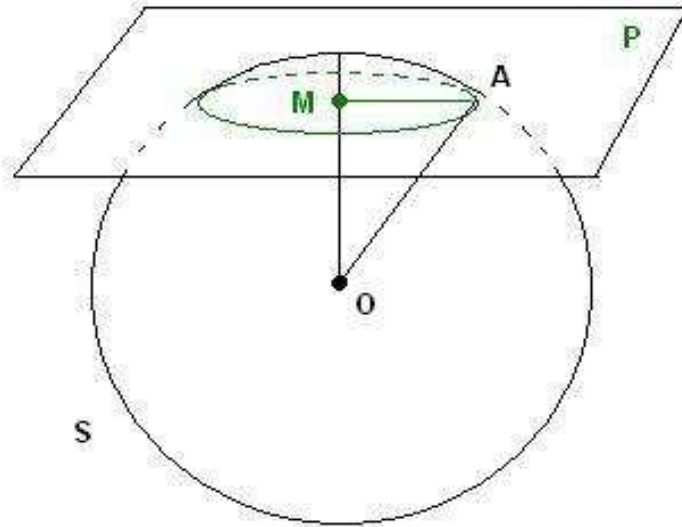
Donc le volume du petit cône sera obtenu en multipliant par $0,8^3$ le volume du grand cône.

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Volume du petit cône} &= 0,8^3 \times \text{Volume du grand cône} \\ &= 0,512 \times \text{Volume du grand cône} \\ &\approx 0,512 \times 376,8 \\ &\approx \mathbf{192,9 \text{ (cm}^3\text{)}} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

On considère une boule (S) de centre O coupée par un plan (P) :



La section de la boule (S) et du plan (P) est un disque de centre M et de rayon MA.
La sphère a un rayon de 8 cm et on donne $OM = 7$ cm.

Déterminer l'aire du disque de centre M et de rayon A.

Solution :

On sait que OMA est un triangle rectangle en M donc par le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} OA^2 &= AM^2 + OM^2 \\ \text{d'où } 8^2 &= AM^2 + 7^2 && ([OA] \text{ est un rayon de la boule }) \\ \text{d'où } 64 &= AM^2 + 49 \\ \text{d'où } AM^2 &= 64 - 49 \\ \text{d'où } AM^2 &= 15 \\ \text{d'où } AM &= \sqrt{15} \approx 3,9 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

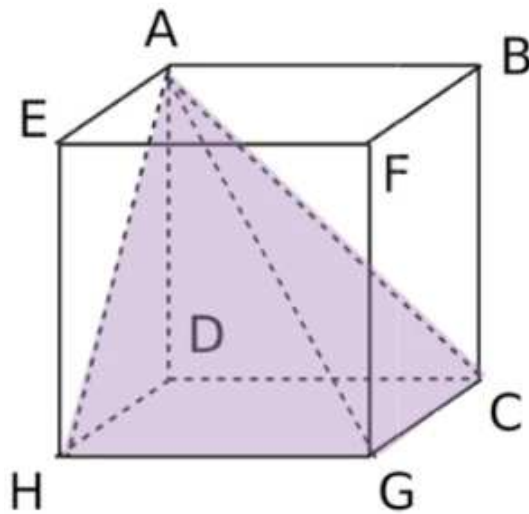
Donc le disque de centre M et passant par A a un rayon d'environ 3,9 cm.

On calcule son aire avec la formule :

$$\text{Aire du disque} = \pi \times R^2 \approx 3,14 \times 3,9^2 \approx 3,14 \times 15,21 \approx \mathbf{47,8 \text{ (cm}^2\text{)}}$$

Exercice 5 :

On considère le cube d'arête 10 cm ci-dessous :



- 1) Sans justifier donner la nature du solide HDGCA.
- 2) Déterminer le volume du cube ABCDEFGH.
- 3) Déterminer le volume du solide HDGCA.

Solution :

1) HDCGA est une pyramide de base HDCG.

2) On a :

$$\text{Volume du cube} = \text{arête}^3 = 10^3 = \mathbf{1000 \text{ (cm}^3\text{)}}$$

3) HDCGA est une pyramide à base carrée (car HDCG est une face du cube)

Donc :

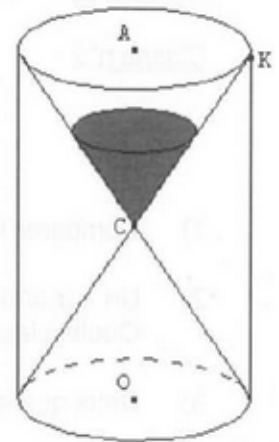
$$\begin{aligned} \text{Volume de HDCGA} &= \frac{\text{aire base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\text{aire HDCG} \times DA}{3} = \frac{10 \times 10 \times 10}{3} = \frac{1000}{3} \\ &\approx \mathbf{333,3 \text{ (cm}^2\text{)}} \end{aligned}$$

Remarque :

En fait le volume de la pyramide est égal à un tiers du volume du cube.

Exercice 6 :

On considère un sablier composé de deux cônes identiques de même sommet C et dont le rayon de la base est $AK = 1,5 \text{ cm}$. Pour le protéger, il est enfermé dans un cylindre de hauteur 6 cm et de même base que les deux cônes.



On note V le volume du cylindre et V_1 le volume du sablier.
Tous les volumes seront exprimés en cm^3 .

- a) Montrer que la valeur exacte du volume V du cylindre est $13,5 \pi$.
- b) Montrer que la valeur exacte de V_1 est $4,5 \pi$.
- c) Quelle fraction du volume du cylindre, le volume du sablier occupe-t-il ?

(On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

Rappel : La formule du volume du cône est $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$

Solution :

a) $V = \pi \times R^2 \times h = \pi \times 1,5^2 \times 6 = \pi \times 2,25 \times 6 = \pi \times 13,5 = \mathbf{13,5\pi}$

b) On cherche le volume d'un des cônes du sablier :

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi \times R^2 \times h'}{3} = \frac{\pi \times 1,5^2 \times 3}{3} = \pi \times 2,25 = 2,25\pi$$

On cherche maintenant le volume du sablier :

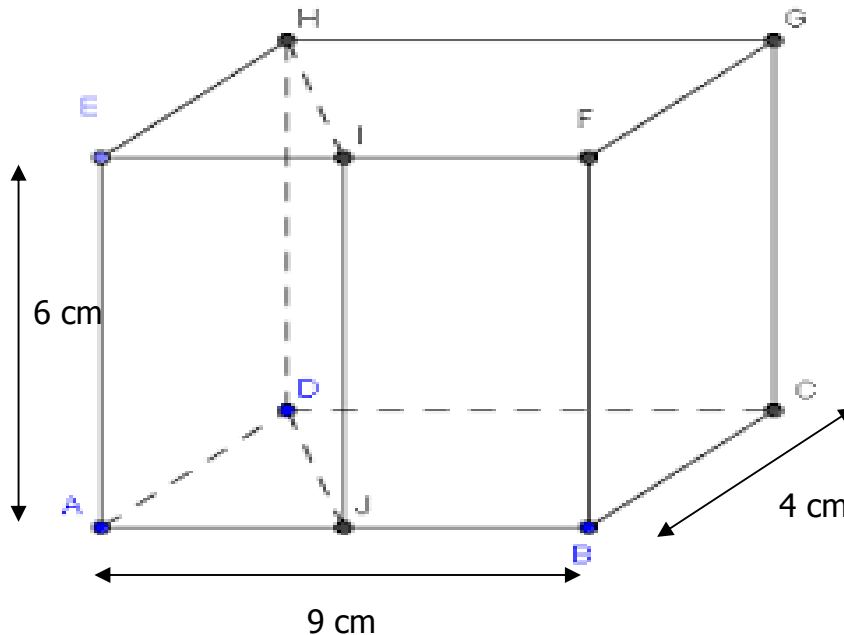
$$V_1 = 2 \times V_{\text{cône}} = 2 \times 2,25\pi = \mathbf{4,5\pi}$$

c) On calcule : $\frac{V_1}{V} = \frac{4,5\pi}{13,5\pi} = \frac{4,5}{13,5} = \frac{1,5 \times 3}{1,5 \times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Donc le volume du sablier occupe $\frac{1}{3}$ du volume du cylindre.

Exercice 7 :

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 9 \text{ cm}$, $FB = 6 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$.



On place I sur $[EF]$ tel que $EI = 3 \text{ cm}$ et J sur $[AB]$ tel que $AJ = 3 \text{ cm}$.

- 1) Sans justifier, donner la nature du quadrilatère DJIH.
- 2) Déterminer l'aire de ce quadrilatère.
- 3) Sans justifier, donner la nature du solide ADJEHI.
- 4) Déterminer le volume de ce solide.

Solution:

1) DJIH est un rectangle.

2) On sait que l'aire de ce rectangle est égal à $DJ \times IJ$.

On sait que $IJ = 6 \text{ cm}$.

Il nous reste à déterminer DJ.

On sait que le triangle ADJ est rectangle en A donc par le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} DJ^2 &= AD^2 + AJ^2 \\ \text{d'où } DJ^2 &= 4^2 + 3^2 \\ \text{d'où } DJ^2 &= 16 + 9 \\ \text{d'où } DJ^2 &= 25 \\ \text{d'où } DJ &= \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Donc : Aire de DJIH = $DJ \times IJ = 5 \times 6 = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$

3) Le solide ADJEHI est un prisme droit de base ADJ et de hauteur 6 cm.
Sa base est un triangle rectangle en A.

4) Comme ADJEHI est un prisme droit on a :

Volume ADJEHI = aire base X hauteur

$$= \frac{AD \times AJ}{2} \times EA$$

$$= \frac{4 \times 3}{2} \times 6$$

$$= \frac{12}{2} \times 6$$

$$= 6 \times 6$$

$$= \mathbf{36 \text{ (cm}^3\text{)}}$$

(On rappelle que l'aire d'un triangle rectangle est égale à la moitié du produit entre les longueurs de ses deux côtés perpendiculaires...)

Pour l'épreuve de maths
du DNB...

Quelques conseils...

L'épreuve de mathématiques au Brevet (au DNB : Diplôme National du Brevet) dure 2 heures et comporte, généralement, entre 7 et 10 exercices.

Le premier conseil est de bien lire tout le sujet une première fois. Cela permet de voir de manière globale ce qu'on va vous demander et vous permettra aussi de voir tout de suite des exercices qui portent sur des choses que vous maîtrisez bien. Déjà cela pourra vous rassurer, en vous disant qu'il y a des choses que vous pourrez faire, et ensuite cela vous permet de « jauger » de la difficulté de certains exercices par rapport à d'autres. Comme vous pouvez traiter l'épreuve dans l'ordre que vous voulez, vous pourrez choisir chaque exercice par préférence.

Ne vous laissez pas décourager par la longueur d'un exercice ou le fait qu'il contienne plein d'informations. Ce n'est pas parce qu'un exercice est long ou contient beaucoup de blabla qu'il est réellement difficile !

Rédigez correctement. Sauf cas contraire, n'oubliez pas que les réponses ne doivent pas tomber du ciel mais doivent être expliquées correctement (en citant les hypothèses permettant de citer une propriété, en citant cette propriété ou en la nommant, etc.)

Si vous avez des calculs à faire, pensez à détailler certaines étapes. Je dis « certaines » car souvent on peut en sauter quelques-unes, mais ne balancez pas directement le résultat que vous aurez trouvé à la calculatrice... Car tout le monde est capable de le faire en tapant correctement hein.

On pense à écrire lisiblement. On souligne les réponses, on indique bien les numéros d'exercices et les questions. Votre copie ne doit pas être un brouillon. Alors on s'applique, parce qu'un correcteur qui se retrouve avec un truc sale et illisible ne fera pas l'effort de chercher, au cas où, quelques points en plus...

Si vous avez travaillé correctement tout au long de l'année, vous ne devriez pas avoir de problèmes. Il ne faut pas abandonner trop vite en vous disant qu'un épreuve de cette type est infaisable ! Vous aurez deux heures, donc essayez même si vous n'arrivez pas au bout d'une question mais que votre début de raisonnement est correct cela vous rapportera quelques points.

On lit bien ce qu'on vous demande. S'il y a des choses à faire sur une feuille annexe ne le faites pas sur le sujet (qui ne sera pas ramassé) ou sur votre copie.

Dans les sujets qui suivent, vous verrez certaines parties en bleu : cela signifie qu'elles ne sont plus au programme de troisième, donc vous pouvez les zapper pour le moment...

BREVET BLANC

SUJET DE MATHÉMATIQUES AVRIL 2018

* Ce sujet comporte 8 exercices indépendants. Vous pouvez les faire dans l'ordre que vous voulez.

* Les exercices sont à faire sur une ou plusieurs copies dont vous numéroterez les pages. Pensez à indiquer votre numéro d'anonymat sur chaque copie. Ne marquez ni votre nom, ni votre prénom, ni votre classe.

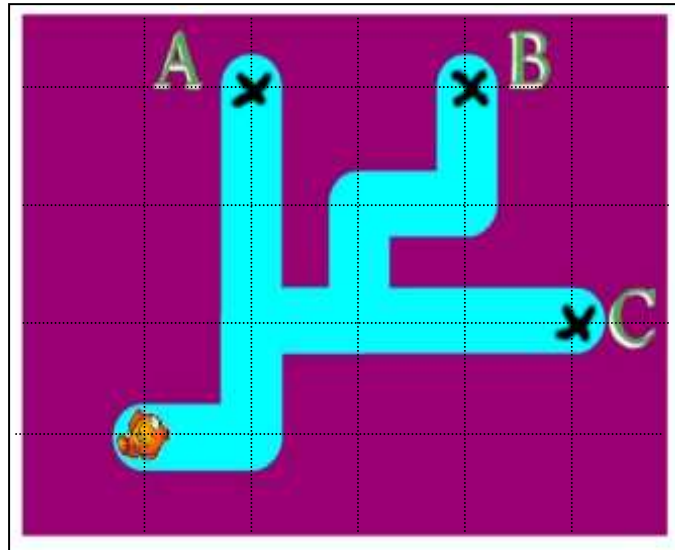
* La calculatrice est autorisée mais il est par contre interdit de la prêter à un autre élève pendant l'épreuve.

* A titre indicatif, voici le barème des différents exercices :

Exercice 1 :	8 points
Exercice 2 :	18 points
Exercice 3 :	14 points
Exercice 4 :	18 points
Exercice 5 :	12 points
Exercice 6 :	8 points
Exercice 7 :	8 points
Exercice 8 :	14 points
Total :	100 points

Exercice 1 :

On a créé trois programmes avec Scratch dont le but est de permettre à un poisson de rejoindre les issues A, B ou C :



(Les issues sont indiquées par les croix.)

Programme 1



Programme 2



Programme 3



- 1) Quel programme permet d'aller en A ? En B ? En C ?
- 2) On désire simplifier le programme permettant d'aller en B en utilisant la boucle suivante :



Quels sont les 4 lignes d'instructions à placer à l'intérieur de cette boucle ?

Exercice 2 :

Indiquer, en justifiant, si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

Affirmation 1 : Les nombres 7 et 11 n'ont aucun multiple commun.

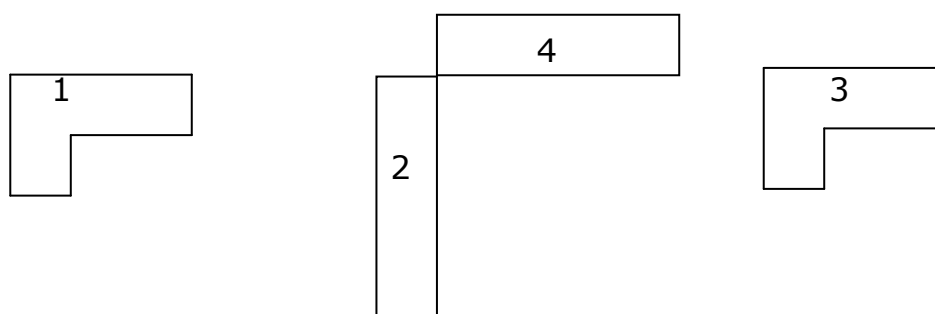
Affirmation 2 : Le triangle ABC avec $AB = 4,5$ cm, $BC = 6$ cm et $AC = 7,5$ cm est rectangle en B.

Affirmation 3 : La décomposition en facteurs premiers de 45 est : $1 \times 3^2 \times 5$.

Affirmation 4 : L'écriture scientifique de $\frac{5 \times 10^6 \times 1,2 \times 10^{-8}}{2,4 \times 10^5}$ est : 25×10^{-8}

Affirmation 5 : $\frac{168}{180}$ est une fraction irréductible.

Affirmation 6 : Ci-dessous, la figure 1 est l'image de la figure 3 par une symétrie axiale et la figure 2 est l'image de la figure 4 par une symétrie centrale.



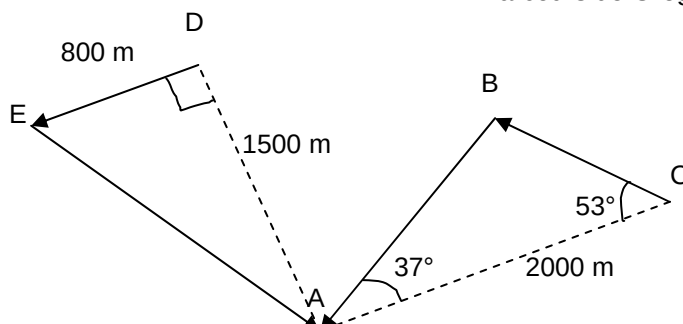
Exercice 3 :

Robert et Greg vont participer à une course de voiliers.

Leurs voiliers vont suivre deux parcours différents. Celui de Robert part du point D et suit le chemin DEA. Celui de Greg part du point C et suit le chemin CBA. (Le schéma ci-dessous ne respecte pas les vraies dimensions mais les indications fournies dessus sont exactes.)

Parcours de Robert

Parcours de Greg



1) Quel voilier aura le chemin le plus long ?

2) Le voilier de Robert navigue à une vitesse moyenne de 40 km/h et celui de Greg à une vitesse moyenne de 50 km/h. Si les deux navires partent de D et B en même temps, qui gagnera la course en arrivant au point A le premier ?

Exercice 4 :

Léa pense qu'en multipliant deux nombres impairs consécutifs (c'est-à-dire qui se suivent) et en ajoutant 1, le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.

1) Étude d'un exemple : 5 et 7 sont deux nombres impairs consécutifs.

a) Calculer $5 \times 7 + 1$.

b) Léa a-t-elle raison pour cet exemple ?

2) Le tableau suivant montre le travail qu'elle a réalisé dans une feuille de calcul avec un tableur :

	A	B	C	D	E
1		Nombre impair	Nombre impair suivant	Produit de ces nombres impairs consécutifs	Résultat obtenu
2	x	$2x+1$	$2x+3$	$(2x+1)(2x+3)$	$(2x+1)(2x+3)+1$
3	0	1	3	3	4
4	1	3	5	15	16
5	2	5	7	35	36
6	3	7	9	63	64
7	4	9	11	99	100
8	5	11	13	143	144
9	6	13	15	195	196
10	7	15	17	255	256
11	8	17	19	323	324
12	9	19	21	399	400

a) D'après ce tableau, quel résultat obtient-on en prenant comme premier nombre impair 17 ?

b) Montrer que ce résultat est un multiple de 4.

c) Parmi les quatre formules de calcul tableur suivantes, deux formules ont pu être saisies dans la cellule D3. Lesquelles ? Aucune justification n'est attendue :

Formule 1 : $= (2*A3 + 1)*(2*A3 + 3)$

Formule 2 : $= (2*B3 + 1)*(2*C3 + 3)$

Formule 3 : $= B3*C3$

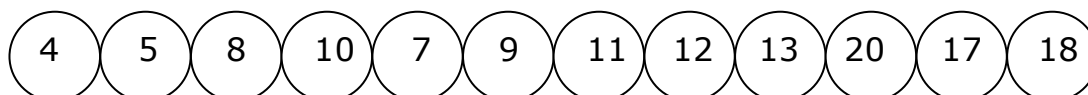
Formule 4 : $= (2*D3 + 1)*(2*D3 + 3)$

3) a) Développer et réduire l'expression $(2x + 1)(2x + 3) + 1$.

b) Montrer que Léa avait raison : le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.

Exercice 5 :

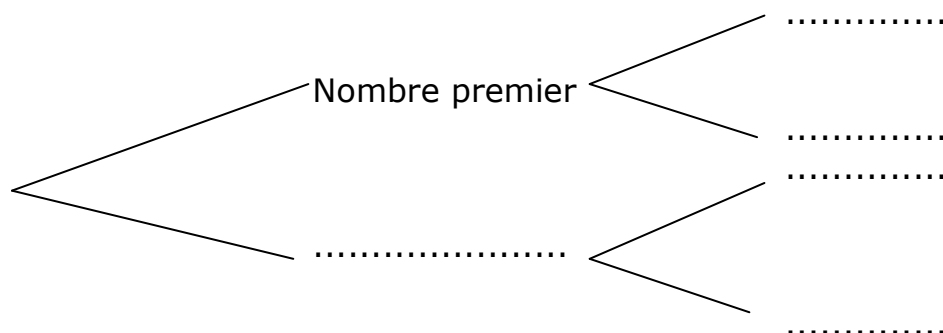
On dispose de 12 jetons numérotés ainsi :



On les place dans une urne opaque. On en tire un au hasard. On note le numéro du jeton et, sans le remettre dans l'urne, on en tire un second au hasard et on note son numéro.

On regarde pour chaque jeton tiré si on a obtenu ou non un nombre premier.

1) Recopier et compléter cet arbre correspondant à cette expérience :



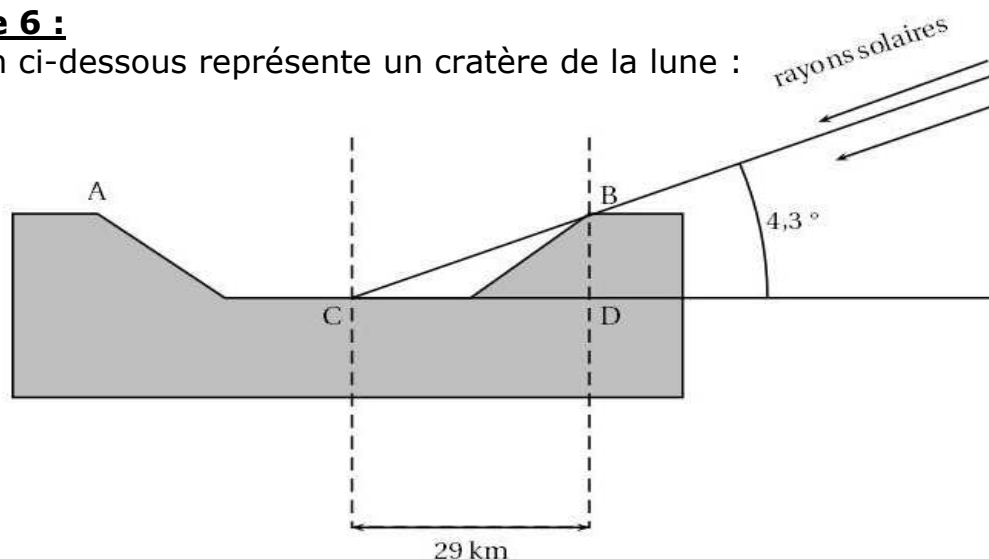
Pondérer chaque branche par une probabilité.

2) En utilisant l'arbre précédent, calculer la probabilité d'avoir deux jetons portant un nombre premier, puis celle de n'avoir aucun nombre premier sur les deux jetons tirés.

3) Calculer la probabilité de n'obtenir qu'un seul jeton portant un nombre premier.

Exercice 6 :

Le dessin ci-dessous représente un cratère de la lune :



BCD est un triangle rectangle en D et $CD = 29$ km.

1) Calculer la profondeur BD du cratère. Arrondir au dixième de km près.

2) La longueur CD représente 20% du diamètre du cratère. Calculer la longueur AB du diamètre de ce cratère.

Exercice 7 :

80 candidats participent à un jeu télévisé. Chacun d'eux a envoyé sa candidature par mail sous la forme d'un fichier word d'une taille de 1300 Ko.

1) Quelle est la taille en octets des 80 fichiers ? En megaoctets ?

(On rappelle que $1 \text{ Ko} = 10^3 \text{ octets}$ et que $1 \text{ Mo} = 10^3 \text{ Ko}$)

2) A la fin de la première semaine, le quart des candidats est éliminé.

A la fin de la deuxième semaine, le deux tiers de ceux qui restent sont éliminés.

A la fin de la troisième semaine, les trois cinquièmes restants sont éliminés.

Calculer le nombre de candidats qui participeront à la finale pendant la quatrième semaine.

Exercice 8 :

En octobre 2016, on comptait 4163 exoplanètes découvertes par la NASA. (Une exoplanète est une planète qui n'est pas dans notre système solaire et qui tourne autour d'une autre étoile que notre soleil.)

Le tableau suivant indique combien de planètes de chaque type ont été découvertes :

	Planètes solides				Planètes gazeuses	
Rayon (km)	<2500	Entre 2500 et 5000	Entre 5000 et 10000	Entre 10000 et 15000	Entre 15000 et 40000	>40000
Zone chaude	7	206	1141	1268	840	555
Zone tempérée	0	1	14	48	42	33
Zone froide	0	0	2	2	2	2

Une planète gazeuse est une planète constituée de gaz et n'a pas de surface solide comme la Terre. Une planète est en zone chaude si elle est proche de son étoile et reçoit beaucoup de chaleur. Une planète est en zone tempérée si elle se trouve, comme la Terre, à une distance suffisante pour que la vie s'y développe. Une planète est en zone froide si elle est trop éloignée de son étoile et reçoit peu de chaleur.

1) La Terre a un rayon d'environ 6300 km. On suppose qu'une planète est susceptible d'abriter de la vie si elle a une taille de même catégorie que la Terre et se trouve en zone tempérée. Combien des 4163 exoplanètes sont-elles susceptibles d'abriter la vie ? Quel pourcentage cela représente-t-il ?

2) Quel est le pourcentage d'exoplanètes situées en zone chaude ?

En 2017, 7 exoplanètes ont été découvertes autour d'une étoile proche de notre système solaire. Voici les caractéristiques de ces 7 planètes :

Planète	Rayon (km)	Distance à l'étoile (millions de km)
b	7056	1.73
c	6900	2.37
d	4900	3.33
e	5700	4.38
f	6600	5.76
g	7200	7.01
h	4800	9.27

- 3) La zone tempérée autour de cette étoile se situe entre 4 et 8 millions de km. Parmi ces 7 planètes, combien sont susceptibles d'abriter la vie ?
- 4) Calculer le rayon moyen de ces 7 planètes. Arrondir au km près.
- 5) Calculer la rayon médian de ces 7 planètes.
-

FIN DU SUJET

Exercice 1 : 8 Points

- 1) Le programme 1 permet au poisson d'aller en C.
 Le programme 2 permet au poisson d'aller en A
 Le programme 3 permet d'aller en B.
- 2) Dans la boucle il faut insérer les 4 instructions suivantes :
- Avancer de 80
 - Tourner de 90° dans le sens direct
 - Avancer de 80
 - Tourner de 90° dans le sens indirect

Exercice 2 : 18 points

Affirmation 1 : Faux. 77 (=7X11) est un multiple commun à 7 et à 11 par exemple.

Affirmation 2 : On a $AC^2 = 7,5^2 = 56,25$.
 On a $AB^2 + BC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$
 Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$
 Donc par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est bien rectangle en B. C'est vrai.

Affirmation 3 : Faux. La décomposition en facteurs premiers de 45 est $3^2 \times 5$ car 1 n'est pas un nombre premier.

Affirmation 4 : Faux .L'écriture scientifique de $\frac{5 \times 10^6 \times 1,2 \times 10^{-8}}{2,4 \times 10^5}$ est :

$$\frac{5 \times 10^6 \times 1,2 \times 10^{-8}}{2,4 \times 10^5} = \frac{5 \times 1,2}{1,2 \times 2} \times \frac{10^6 \times 10^{-8}}{10^5} = 2,5 \times 10^{-7}$$

Affirmation 5 : Faux car 168 et 180 sont pairs, donc la fraction $\frac{168}{180}$ est déjà simplifiable par 2.

Affirmation 6 : Faux. La figure 1 est l'image de la figure 3 par une translation et la figure 2 est l'image de la figure 4 par une symétrie axiale ou une rotation

Exercice 3 : 14 points

1) * On sait que le triangle DEA est rectangle en D, donc par la théorème de Pythagore on a : $EA^2 = ED^2 + DA^2 = 800^2 + 1500^2$
 $= 640000 + 2250000 = 2890000$

Donc $EA = \sqrt{2890000} = 1700$ (m)

Donc $DE + EA = 800 + 1700 = 2500$ (m)

Robert va parcourir un chemin long de 2500 m.

* On sait que le triangle BCA est un triangle rectangle en B car $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont deux angles complémentaires.

On a : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2000}$ donc $AB = 2000 \times \cos(\widehat{BAC}) =$
 $= 2000 \times \cos(37^\circ)$
 $\approx 1597,3$ (m)

On a : $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{2000}$ donc $BC = 2000 \times \sin(\widehat{BAC})$
 $= 2000 \times \sin(37^\circ)$
 $\approx 1203,6 \text{ (m)}$

Donc $BC + BA \approx 1597,3 + 1203,6 \approx 2800,9 \text{ (m)}$
 Greg va parcourir un chemin d'environ 2800,9 m.

* C'est donc Greg qui a le chemin le plus long.

2) On rappelle la formule $t=d/v$

Pour le voilier de Robert : $\frac{2,5}{40} = 0,0625 \text{ (h)}$

Pour le voilier de Greg : $\frac{2,8009}{50} \approx 0,056 \text{ (h)}$

C'est le voilier de Greg qui mettra le moins de temps.

Exercice 4 : 18 points

- 1) a) $5 \times 7 + 1 = 36$
 b) On a $36 = 4 \times 9$ donc 36 est bien divisible par 4 et Léa a raison.

- 2) a) On trouve 324 en prenant comme premier nombre impair 17.

b) $\frac{324}{4} = 81$ donc 324 est bien un multiple de 4.

c) dans la cellule D3 on peut entrer les formules :

Formule 1 : $= (2*A3 + 1)*(2*A3 + 3)$

ou :

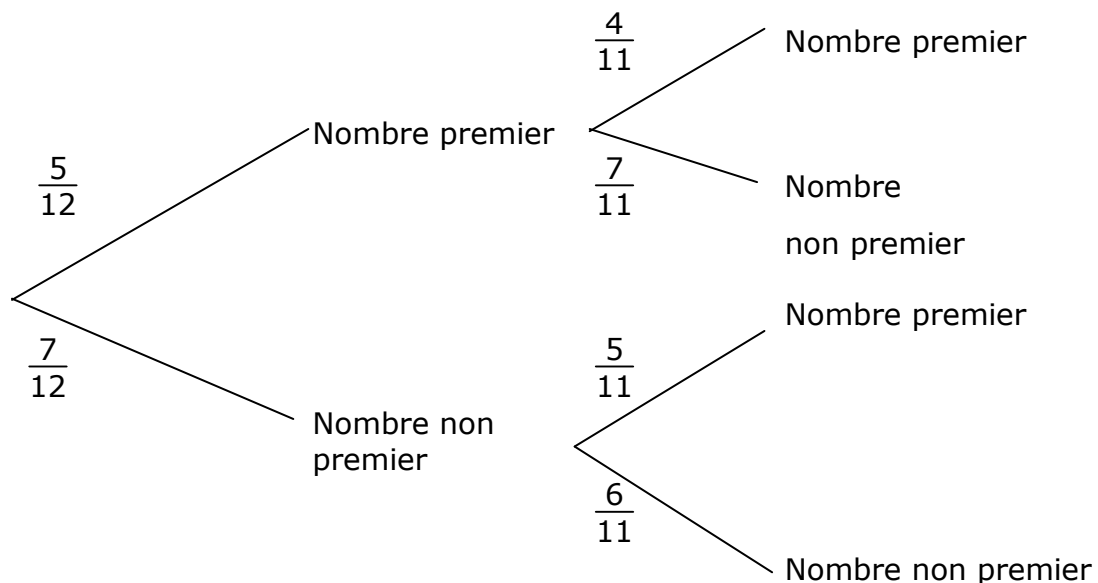
Formule 3 : $= B3*C3$

- 3) a) $(2x + 1)(2x + 3) + 1 = 2x \times 2x + 2x \times 3 + 1 \times 2x + 1 \times 3 + 1$
 $= 4x^2 + 6x + 2x + 3 + 1$
 $= 4x^2 + 8x + 4$

b) $4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4 \times \text{Un nombre entier}$
 Donc on obtient bien un multiple de 4 quel que soit x.

Exercice 5 : 12 points

1)



$$2) P(\text{"Avoir 2 jetons premiers"}) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5 \times 4}{3 \times 4 \times 11} = \frac{5}{33}$$

$$P(\text{"N'avoir aucun nombre premier sur les 2 jetons"}) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7 \times 6}{2 \times 6 \times 11} = \frac{7}{22}$$

$$3) P(\text{"Avoir un seul jeton avec un nombre premier"}) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} \\ = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132}$$

Exercice 6 : 8 points

1) On sait que le triangle BCD est rectangle en D. On a :

$$\tan(\widehat{BCD}) = \frac{BD}{CD} \text{ donc } \tan(4,3^\circ) = \frac{BD}{29} \text{ d'où } BD = 29 \times \tan(4,3^\circ) \\ \approx 2,2 \text{ (km)}$$

Le cratère a une hauteur d'environ 2,2 km.

$$2) \text{ On a } \frac{CD}{AB} = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ donc } \frac{29}{AB} = 0,2 \text{ donc } AB = \frac{29}{0,2} = 145 \text{ (km)}$$

Le cratère a un diamètre de 145 km.

La longueur CD représente 20% du diamètre du cratère. Calculer la longueur AB du diamètre de ce cratère (arrondir au km près.)

Exercice 7 : 8 points

$$1) 80 \times 1300 = 104000 \text{ (Ko)}$$

$$104000 \times 10^3 = 104000000 \text{ (Octets)}$$

$$\frac{104000}{10^3} = 104 \text{ (Mo)}$$

La taille des fichiers est donc de 104 000 000 Octets ou 104 Mo.

2)

$$80 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{80 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{80}{10} = 8$$

Donc 8 candidats participeront à la finale.

Exercice 8 : 14 points

1) Il y a 14 planètes ayant un rayon compris entre 5000 et 10000 km et situées en zone tempérée. Donc il y a 14 planètes susceptibles d'abriter la vie.

$$\frac{14}{4163} \times 100 \approx 0,34$$

Il y a environ 0,34 % des exoplanètes susceptibles d'abriter la vie.

$$2) \text{ On a } 7 + 206 + 1141 + 1268 + 840 + 555 = 4017$$

Il y a 4017 planètes situées en zone chaude.

$$\frac{4017}{4163} \times 100 \approx 96,5$$

Il y a environ 96,5% des exoplanètes situées en zone chaude.

3) Il y a 3 planètes situées en zone tempérée et ayant une taille de la même catégorie que la terre. Donc il y a 3 planètes susceptibles d'abriter la vie.

4)

$$\frac{7056+6900+4900+5700+6600+7200+4800}{7} \approx 6165 \text{ (km)}$$

Le rayon moyen des 7 planètes est d'environ 6165 km.

5) Les rayons dans l'ordre croissant sont :

4800 - 4900 - 5700 - 6600 - 6900 - 7056 - 7200

Il y a 7 valeurs.

$$7 : 2 = 3,5$$

Donc le rayon médian est la 4^e valeur de la série : rayon médian = 6600 km

Brevet Blanc de Mathématiques

Lundi 12 mai 2014

Durée : 2 heures

Calculatrice autorisée

Le soin apporté à la rédaction, la qualité de la présentation, la rigueur des notations et de l'orthographe seront pris en compte à hauteur de 4 points sur 40.

La feuille d'annexes sera jointe à votre copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 1 :

Soit $A = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$

$$B = 2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{3}$$

$$C = 4,23 \times 10^{-4} + 1,17 \times 10^2$$

Pour chaque question, il est demandé de détailler un minimum les différentes étapes du calcul.

a) Ecrire A sous la forme d'une fraction irréductible.

b) Ecrire B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers et b le plus petit possible.

c) Ecrire C sous forme décimale et en notation scientifique.

Exercice 2 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). **Aucune justification n'est demandée.**

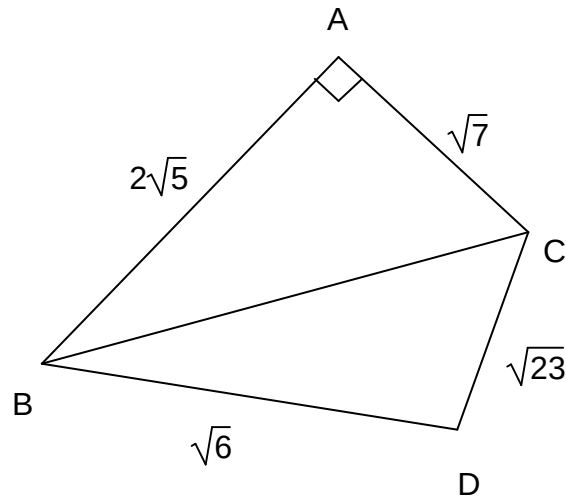
Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte.

Cocher dans le tableau de la feuille annexe la case correspondant à votre choix.

	A	B	C
1) Le nombre $\frac{15}{7}$ est :	un nombre rationnel	un nombre irrationnel	un nombre décimal
2) $(10^8 \times 2 \times 10 \times 10^{-6})^2 =$	4 000 000	0, 000 004	4×10^{-5}
3) Si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible alors :	les nombres a et b sont pairs	les nombres a et b sont deux nombres premiers entre eux	le nombre a ou le nombre b est un nombre premier
4) L'écriture scientifique de 58 300 000 est :	$5,83 \times 10^8$	$5,83 \times 10^7$	$\frac{583}{10^{-8}}$
5) $x^2 - 9$ est égal à :	$(x - 3)(x + 3)$	$(x - 3)^2$	$-8x^2$
6) $\sqrt{32} + \sqrt{8} - 18\sqrt{2} =$	- 12	$- 6\sqrt{2}$	$- 12\sqrt{2}$

Exercice 3 :

On considère la figure suivante qui n'est pas réalisée à l'échelle :
(Les dimensions sont données en cm et le triangle ABC est rectangle en A.)



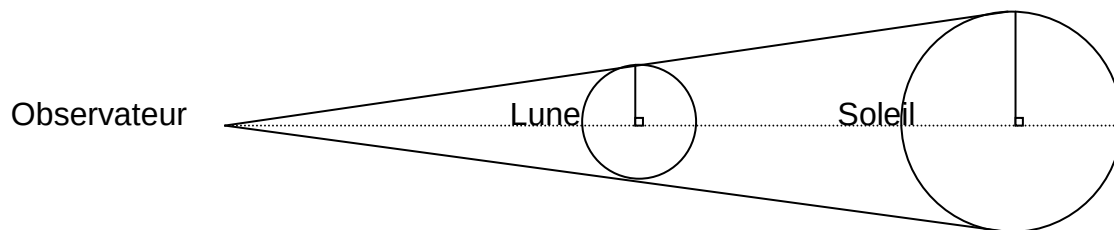
- 1) Calculer BC.
- 2) Le triangle BCD est-il rectangle ? Le justifier.

Exercice 4 :

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation de cet exercice.

Lors d'une éclipse solaire, la lune se place parfaitement entre un observateur sur Terre et le Soleil.

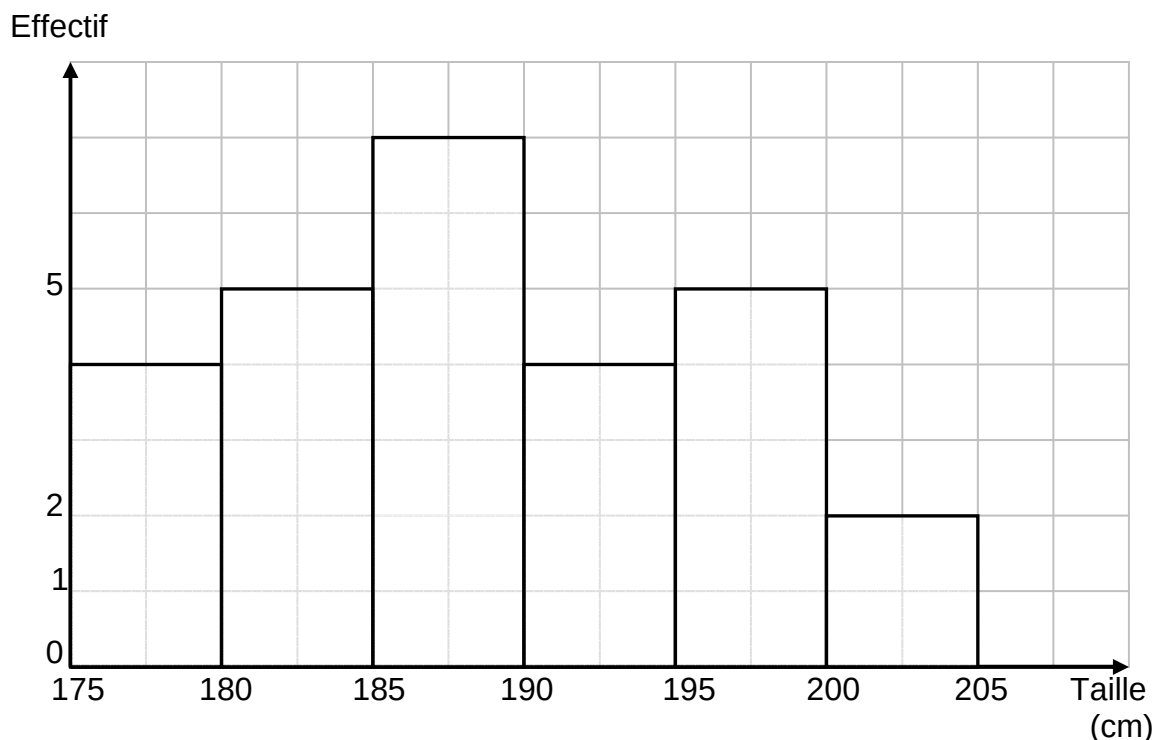
La lune a alors dans le ciel la même taille que le Soleil.



Sachant que la Lune a un diamètre de 1737 km et se trouve à 384400 km de la Terre, quel est le rayon du Soleil sachant qu'il se trouve à 149 600 000 km de l'observateur ?

Exercice 5 :

On a représenté sur ce graphique la taille des différents joueurs d'une équipe de basket-ball :



1) (Tableau à compléter sur la feuille annexe !)

Compléter à l'aide du graphique le tableau suivant :

Taille (cm)	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[	[195 ; 200[	[200 ; 205[
Effectif						
Effectif cumulé croissant						

2) Donner l'effectif total et l'étendue des valeurs de cet exercice.

3) Quelle est la taille moyenne d'un joueur de cette équipe ?

4) Dans quelle classe se trouve la taille médiane d'un joueur de cette équipe ?

5) Dans quelle classe se trouve le troisième quartile de cette série.

6) Quel est le pourcentage de joueurs ayant une taille supérieure ou égale à 1,90 m dans cette équipe ? (Arrondir votre réponse à l'unité.)

7) Si on choisit un joueur au hasard dans cette équipe, quelle est la probabilité que sa taille soit supérieure ou égale à 185 cm et inférieure strictement à 200 cm ?

Exercice 6 :

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation de cet exercice.

Il est temps de se répartir l'argent gagné cette semaine !

On a gagné 192 billets de 20 € et 272 billets de 10 €.

Pour se répartir cette somme, on décide de faire des tas qui comporteront tous le même nombre de billets de 20 € et le même nombre de billets de 10 €. Bien sûr, on veut utiliser tous les billets et faire le plus grand nombre de tas possibles. Quelle somme d'argent aura-t-on dans chaque tas ? (Penser à trouver d'abord le nombre de tas...)

Exercice 7 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). **Aucune justification n'est demandée.**

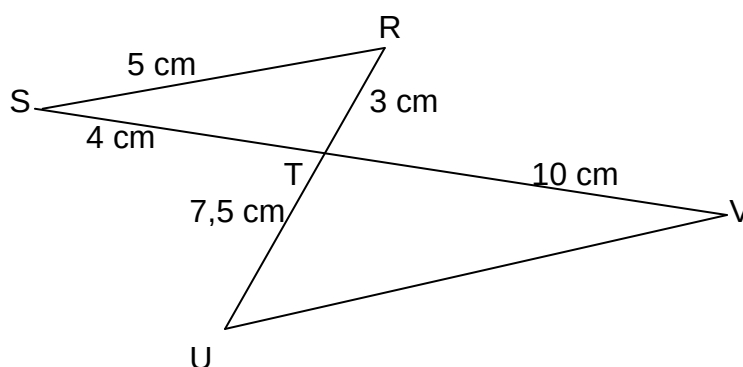
Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte.

Cocher dans le tableau de la feuille annexe la case correspondant à votre choix.

Le QCM utilise la figure ci-dessous et les informations données :

Les points S, T et V sont alignés.

Les points R, T et U sont alignés.



	A	B	C
1) Les droites (SR) et (UV) sont :	sécantes	parallèles	on ne peut pas savoir
2) Pour démontrer que (SR) est parallèle à (UV) on utilise :	Le théorème de Pythagore	Le théorème de Thalès	La réciproque du théorème de Thalès
3) Le triangle SRT est :	rectangle	isocèle	quelconque
4) UV mesure :	11 cm	9,5 cm	12,5 cm
5) TUV est :	un agrandissement de TRS	une réduction de TRS	le symétrique de TRS

Exercice 8 :

On considère le programme suivant :

- 1) Choisir un nombre.
 - 2) Ajouter 3.
 - 3) Prendre le carré du résultat précédent.
 - 4) Retirer 6 fois le nombre choisi au départ.
 - 5) Retirer 13 et donner le résultat final.
- a) Effectuer ce programme en partant de -2 , puis de 0 .
- b) Effectuer ce programme en partant d'un nombre x .
- c) Développer et réduire l'expression obtenue.
- d) Factoriser l'expression obtenue.

Exercice 9 :

Les constructions sont à effectuer sur la fiche annexe.

- 1) Tracer un triangle BAC rectangle en B tel que $AB = 3$ cm et $AC = 6$ cm.
- 2) Placer un point D sur la demi-droite $[BA)$ tel que $AD = 5$ cm.
- 3) Tracer la droite perpendiculaire à (BD) passant par D. Elle coupe (CA) en E. Placer ce point E.
- 4) Sans justifier, donner la nature du triangle ADE.
- 5) Citer la propriété permettant de prouver que (BC) et (DE) sont parallèles.
- 6) Déterminer AE.
- 7) Déterminer DE. Donner le résultat exact à l'aide d'une racine carrée, puis le résultat sous forme décimale arrondi au dixième de centimètres près.

Exercice 10 :

On participe à un jeu télévisé.

Dans un sac opaque numéroté A se trouvent 4 oursons en peluche identiques au touché : 3 noirs et 1 blanc.

Dans un sac opaque numéroté B se trouvent 7 oursons en peluche identiques au touché : 5 noirs et 2 blancs.

Dans ce jeu, on lance d'abord une pièce non truquée et on regarde si on obtient pile ou face.

Si on obtient pile, on choisit un ourson au hasard dans le sac A.

Si on obtient face, on choisit par contre un ourson au hasard dans le sac B.

On gagne à ce jeu télévisé si on a choisi un ourson blanc.

- 1) Quelle est la probabilité de tirer un ourson blanc dans le sac A.
- 2) Quelle est la probabilité de tirer un ourson noir dans le sac B.
- 3) Réaliser l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire utilisée dans ce jeu puis déterminer la probabilité de gagner à ce jeu.

Numéro de candidat :

Feuille Annexe

Exercice 2 :

Cocher dans le tableau vos réponses au QCM

	A	B	C
Réponse 1			
Réponse 2			
Réponse 3			
Réponse 4			
Réponse 5			
Réponse 6			

Exercice 5 :

Taille (cm)	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[	[195 ; 200[	[200 ; 205[
Effectif						
Effectif cumulé croissant						

Exercice 7 :

Cocher dans le tableau vos réponses au QCM :

	A	B	C
Réponse 1			
Réponse 2			
Réponse 3			
Réponse 4			
Réponse 5			

Exercice 9 :

Construction à faire ci-dessous

CORRECTION BREVET MAI 2014

Exercice 1 :

$$A = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{5} - \frac{8}{15} = \frac{9}{15} - \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$$

$$B = 2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{3} \quad 2\sqrt{25 \cdot 3} - 5\sqrt{9 \cdot 3} + 4\sqrt{3} = 2 \times 5\sqrt{3} - 5 \times 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \\ = 10\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

$$C = 4,23 \times 10^{-4} + 1,17 \times 10^2 = 0,000\,423 + 117 = \mathbf{117,000\,423} : \text{écriture décimale} \\ = \mathbf{1,170\,004\,23} : \text{notation scientifique}$$

Exercice 2 :

	A	B	C
Réponse 1	X (rationnel)		
Réponse 2	X (4 000 000)		
Réponse 3		X(a et b premiers entre eux)	
Réponse 4		X (5,83X10')	
Réponse 5	X (x-3)(x+3)		
Réponse 6			X (-12 $\sqrt{2}$)

Exercice 3 :

1) On sait que le triangle ABC est rectangle en A donc par le théorème de Pythagore on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ donc } BC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2 = 20 + 7 = 27$$

$$\text{Donc } \mathbf{BC = \sqrt{27} (cm) \approx 5,2 (cm)}$$

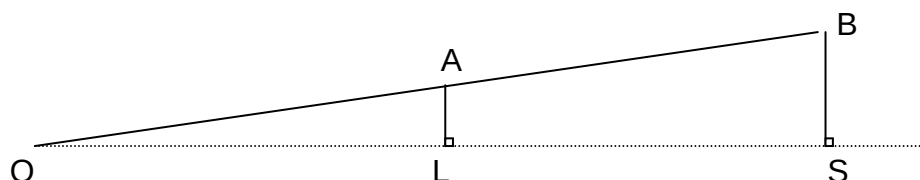
2) Dans le triangle BCD le plus grand côté est [BC].

$$\text{On a : } BC^2 = \sqrt{27^2} = 27 \text{ et } BD^2 + CD^2 = \sqrt{6^2} + \sqrt{23^2} = 6 + 23 = 29$$

$$\text{Donc } BC^2 \neq BD^2 + CD^2$$

Donc comme conséquence du théorème de Pythagore **le triangle BCD n'est pas rectangle**

Exercice 4 :



On sait que O, L et S sont alignés, que O, A et B sont alignés et que (AL) // (BS)

Donc par le théorème de Thalès on a :

$$\frac{OL}{OS} = \frac{OA}{OB} = \frac{AL}{BS} \text{ d'où } \frac{384400}{149600000} = \frac{OA}{OB} = \frac{1737}{BS}$$

$$\text{D'où } BS = \frac{149600000}{384400} \times 1737 \approx \mathbf{676\,002 (km)}$$

Exercice 5 :

1) (

Taille (cm)	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[	[195 ; 200[	[200 ; 205[
Effectif	4	5	7	4	5	2
Effectif cumulé croissant	4	9	16	20	25	27

$$2) \text{ Effectif total} = \mathbf{27} \quad \text{Etendue} = 202,5 - 177,5 = 25 \text{ ou } 205 - 175 = 30$$

$$3) \text{ Moyenne} = (177,5 \times 4 + 182,5 \times 5 + 187,5 \times 7 + 192,5 \times 4 + 197,5 \times 5 + 202,5 \times 2) : 27 \\ \approx \mathbf{188,8 (cm)}$$

$$4) \text{ Il y a 27 valeurs dans cette série. } 27 : 2 = 13,5$$

Donc on peut prendre comme médiane toute valeur située entre la 13^e et la 14^e valeur de la série. Le médiane se trouve dans la classe **[185 ; 190[**

$$5) 75\% \times 27 = 0,75 \times 27 = 20,25. Q3 \text{ est la 21^e valeur de la série.}$$

Q3 est dans la classe [190 ; 195[

6) Il y a 11 joueurs ayant une taille supérieure ou égale à 1m90.

$\frac{11}{27} \times 100 \approx 40,7$ Donc **40,7%** environ des joueurs ont une taille supérieure ou égale à 1m90.

7) Il y a 16 joueurs ayant une taille soit supérieure ou égale à 185 cm et inférieure strictement à 200 cm

Donc la probabilité de choisir un tel joueur au hasard est $\frac{16}{27}$

Exercice 6 :

Le nombre de tas est un diviseur du nombre de billets de 20€, le nombre de tas est un diviseur du nombre de billets de 10€ et le nombre de tas doit être maximal.

Le nombre de tas est donc le PGCD du nombre de billets de 20€ et du nombre de billets de 10€.

On cherche PGCD(272 ; 192) avec l'algorithme d'Euclide.

Soit $p = \text{PGCD}(272 ; 192)$ On a $272 = 1 \times 192 + 80$ donc $p = \text{pgcd}(192; 80)$

$$192 = 2 \times 80 + 32 \quad \text{donc } p = \text{pgcd}(80; 32)$$

$$80 = 2 \times 32 + 16 \quad \text{donc } p = \text{pgcd}(32; 16)$$

$$32 = 2 \times 16 + 0 \quad \text{donc le pgcd cherché est le dernier reste non nul}$$

Donc $\text{PGCD}(272; 192) = 16$ et on pourra faire **16 tas**.

Dans chaque tas on aura $\frac{272}{16} = 17$ billets de 10€ et $\frac{192}{16} = 12$ billets de 20€

Donc dans chaque tas on aura $17 \times 10 + 12 \times 20 = 170 + 240 = \mathbf{410 \text{ €}}$

Exercice 7 :

	A	B	C
Réponse 1		X (parallèles)	
Réponse 2			X (réciproque Thalès)
Réponse 3	X (rectangle)		
Réponse 4			X (12,5 cm)
Réponse 5	X (agrandissement)		

Exercice 8 :

a) Si on part de - 2 :

$$1) -2 \quad 2) -2+3=1 \quad 3) 1^2 = 1 \quad 4) 1 - 6X(-2)=1 + 12 = 13 \quad 5) 13-13 = 0$$

Si on part de 0 :

$$1) 0 \quad 2) 0 + 3 = 3 \quad 4) 3^2 = 9 \quad 4) 9-6X0 = 9 \quad 5) 9-13 = -4$$

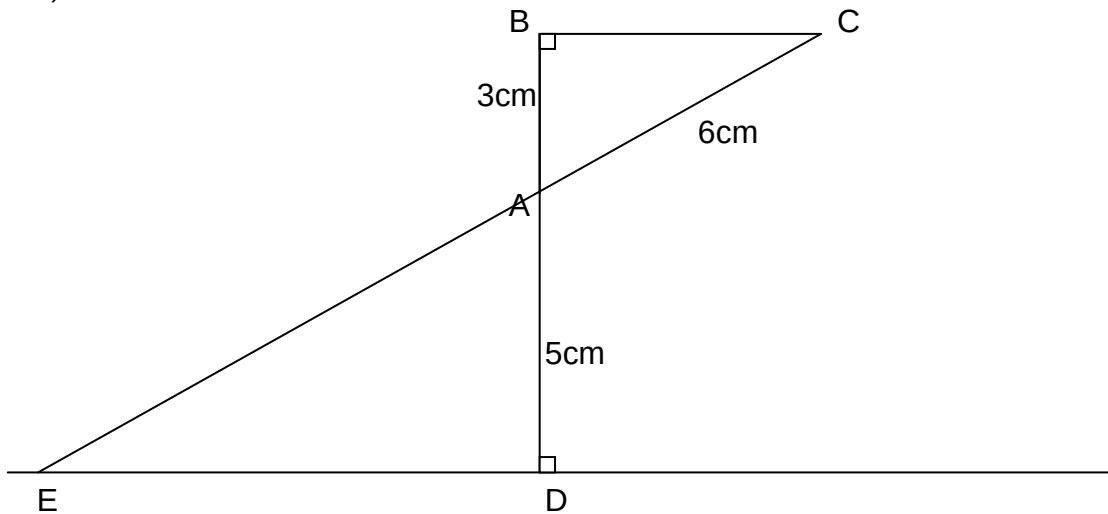
$$b) 1) x \quad 2) x+3 \quad 3) (x+3)^2 \quad 4) (x+3)^2 - 6x \quad 5) (x+3)^2 - 6x -13$$

$$c) (x+3)^2 - 6x -13 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 - 6x - 13 = x^2 + 6x + 9 - 6x - 13 = x^2 -4$$

$$e) x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

Exercice 9 :

- 1) Triangle ABC
- 2) Point D
- 3) Point E



4) **ADE est un triangle rectangle en E**

5) Pour prouver que $(BC) \parallel (DE)$ on utilise la propriété "**Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.**"

6) On sait que B, A et D sont alignés, que C, A et E sont alignés et que $(BC) \parallel (DE)$

donc par le théorème de Thalès on a : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ donc $\frac{3}{5} = \frac{6}{AE} = \frac{BC}{DE}$ D'où $AE = \frac{5}{3} \times 6 = \frac{30}{3}$
= 10 (cm)

7) On sait que le triangle ADE est rectangle en E. Donc par le théorème de Pythagore on a : $AE^2 = AD^2 + DE^2$ d'où $10^2 = 5^2 + ED^2$ d'où $100 = 25 + ED^2$

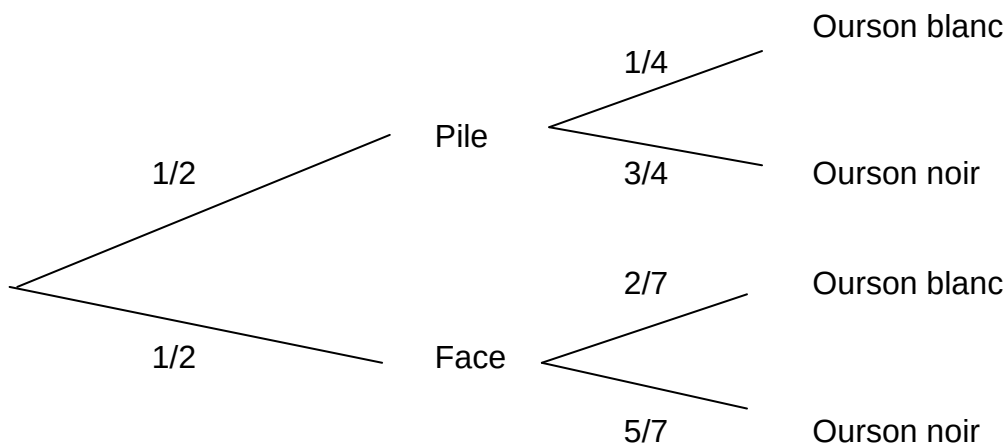
Donc $ED^2 = 100 - 25 = 75$ donc $ED = \sqrt{75} = \sqrt{25} \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)} \approx 8,7 \text{ (cm)}$

Exercice 10 :

1) $P(\text{"Avoir un ourson blanc dans le sac A"}) = \frac{1}{4}$

2) $P(\text{"Avoir un ourson noir dans le sac B"}) = \frac{5}{7}$

3)



$$P(\text{"Gagner à ce jeu"}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{56} + \frac{8}{56} = \frac{15}{56}$$

BREVET BLANC

SUJET DE MATHÉMATIQUES

MARS 2020

Durée : 2 h

* Ce sujet comporte 8 exercices indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez, en précisant bien le numéro de l'exercice traité pour chacun d'eux.

* La calculatrice est autorisée mais il est par contre interdit de la prêter à un autre élève pendant l'épreuve.

* En plus des points prévus pour chaque exercice de l'épreuve, la présentation, la rédaction et l'orthographe seront évaluées. Toute trace de recherche, même incomplète, sera valorisée dans le total des points.

* Deux questions du sujet (une dans l'exercice 4 et une dans l'exercice 8) seront à faire sur la feuille annexe qui sera à rendre avec le sujet.

* A titre indicatif, voici le barème des différents exercices :

Exercice 1 :	10 points
Exercice 2 :	10 points
Exercice 3 :	18 points
Exercice 4 :	19 points
Exercice 5 :	12 points
Exercice 6 :	12 points
Exercice 7 :	11 points
Exercice 8 :	8 points
Total :	100 points

Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question ou affirmation donnée, une seule des trois réponses proposées est exacte. Sur la copie, indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande pas de justifier.

Question, affirmation	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1) Si la population d'une ville de 300 habitants augmente de 20% il y aura alors :	320 habitants	60 habitants	360 habitants
2) Le seul nombre premier est :	3 201	1 031	177 845
3) La solution de l'équation $3x + 10 = 2x + 8$ est :	-2	3	0
4) La décomposition en facteurs premiers de 63 est :	$1 \times 3^2 \times 7$	7×9	$3^2 \times 7$
5) Un diviseur de 9 est :	18	0	3

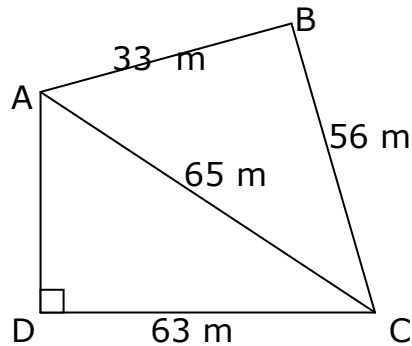
Exercice 2 :

Un professeur d'EPS fait courir ses élèves autour d'un stade de forme rectangulaire, qui mesure 90 m de long sur 60 m de large.

- 1) Expliquer pourquoi la longueur du stade est de 300 m.
- 2) Un élève parcourt 6 tours en 9 minutes. Calculer sa vitesse en m/min puis en km/h.
- 3) A cette vitesse, combien mettra-t-il de temps pour parcourir 18 km ? Donner la réponse en heures et en minutes.

Exercice 3 :

Edgard Dunor possède un champ représenté par le triangle ABC ci-dessous. Il achète à son voisin le champ d'à côté représenté par le triangle rectangle ADC. (On donne $AB = 33$ m, $AC = 65$ m, $BC = 56$ m et $DC = 63$ m.)



- 1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
- 2) On rappelle que l'aire d'un triangle est donnée par la formule : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$
Calculer l'aire du triangle ABC en m^2 .
- 3) Déterminer AD.
- 4) Calculer l'aire du quadrilatère ABCD en m^2 .
- 5) Edgard veut recouvrir la surface de ses deux champs avec du gazon artificiel. Celui-ci est vendu par plaques carrées de 2m de côté. Déterminer le nombre de plaques qu'il doit acheter.

Exercice 4 :

Un professeur de SVT demande aux 29 élèves d'une classe de 6ème de faire germer des graines de blé chez eux.

Le tableau ci-dessous donne les tailles des plantules (petites plantes) des 29 élèves 10 jours après le début de la plantation.

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2		2	2	3	1	4	4	2

- 1) Déterminer combien d'élèves ont eu une petite plante de 14 cm au bout de 10 jours.
- 2) Quel est le pourcentage de plantules ayant une taille de 8 ou 12 cm ? Arrondir votre réponse à l'unité.
- 3) Calculer le moyenne de cette série. Arrondir la réponse au mm près.
- 4) a) Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants sur la **feuille annexe**.
b) Déterminer la médiane de cette série statistique.
c) Indiquer ce que représente cette valeur.
- 5) Déterminer l'étendue de cette série.
- 6) Combien de plantes de 22 cm doit-on ajouter au minimum pour que la médiane soit 20 cm ?

Exercice 5 :

- 1) Donner tous les diviseurs de 84, puis tous les diviseurs de 63.
- 2) Un collège organise une journée de sport pour les élèves de 4° et de 3°. Ce collège compte 84 élèves de 4° et 63 de 3°.
On souhaite répartir tous ces élèves en équipes constituées d'élèves de ces deux niveaux. Chaque équipe doit être formée du même nombre d'élèves de 4° et du même nombre d'élèves de 3°.
 - a) Donner tous les nombres d'équipes possibles qui peuvent convenir.
 - b) En déduire le plus grand nombre d'équipes qu'on pourra constituer et donner la composition de chaque équipe.

Exercice 6 :

Indiquer, en justifiant convenablement, si chacune des trois affirmations en gras ci-dessous est vraie ou fausse :

Affirmation 1 :

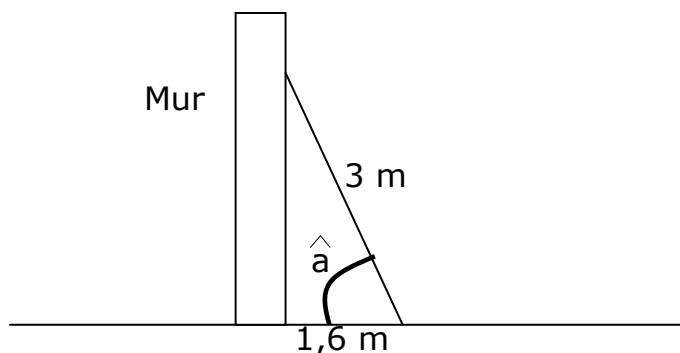
La fraction $\frac{504}{729}$ est irréductible.

Affirmation 2 :

Pour les fêtes un chocolatier a vendu $\frac{4}{7}$ de ses chocolats la première quinzaine de décembre. Lors de la deuxième quinzaine de décembre il vend alors $\frac{1}{3}$ de ce qu'il lui reste.

Le chocolatier a vendu $\frac{1}{7}$ de ses chocolats lors de la deuxième quinzaine de décembre.

Affirmation 3 :



Sur cette figure, une échelle de 3 m de long est posée contre un mur vertical. Le pied de l'échelle est à 1,6 m du mur.

L'angle $\hat{a}$ entre l'échelle et le sol est plus grand que 50° .

Exercice 7 :

Les légionelles sont des bactéries présentes dans l'eau potable. Lorsque la température de l'eau est comprise entre 30° et 45° C, ces bactéries prolifèrent et peuvent atteindre en 2 ou 3 jours des concentrations dangereuses pour l'homme. On rappelle que μm est l'abréviation du micromètre et qu'un micromètre est égal à 10^{-6} m.

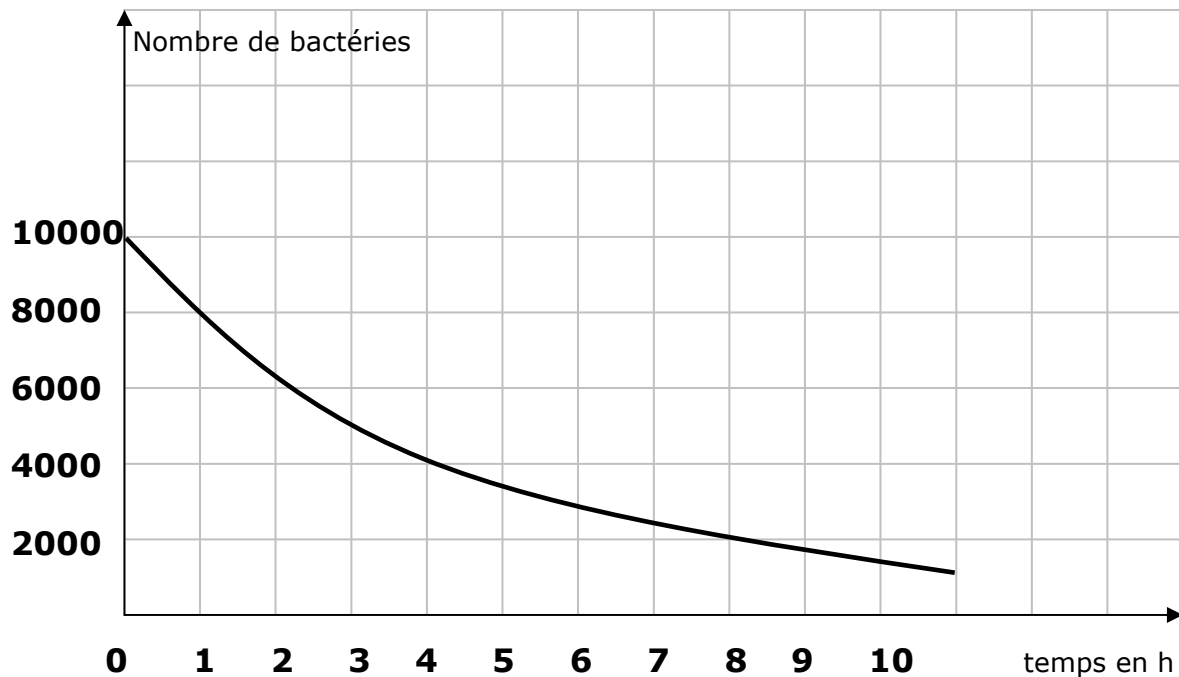
1) La taille d'une bactérie légionelle est de $0,8 \mu\text{m}$.

Exprimer cette taille en mètres et donner le résultat en notation scientifique.

2) On souhaite tester l'efficacité d'un antibiotique pour lutter contre la bactérie légionelle.

On introduit l'antibiotique dans un récipient qui contient 10^4 bactéries légionelles au temps $t=0$.

La représentation graphique ci-dessous donne le nombre de bactéries présentes dans ce récipient en fonction du temps :



Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique :

a) Au bout de 3h, combien reste-t-il environ de bactéries dans le récipient ?

b) Au bout de combien de temps environ reste-t-il 6000 bactéries dans le récipient ?

c) On estime qu'un antibiotique sera efficace sur l'être humain s'il parvient à réduire de 80% le nombre initial de bactéries dans le récipient en moins de 5h. L'antibiotique présenté ici est-il efficace ?

Exercice 8 :

Rappels Scratch	
Orientation du lutin : S'orienter à 90° : pour se déplacer vers la droite S'orienter à 0° : pour se déplacer vers le haut S'orienter à -90° : pour se déplacer vers la gauche S'orienter à 180° : pour se déplacer vers le bas	Les angles : Dans le tracé ci-dessous, pour obtenir un angle de 60°, on peut utiliser l'instruction : tourner de 120 degrés

Le chat indique la position de départ.

1) On exécute avec Scratch le script 1 ci-contre :

```

Quand  est cliqué
  stylo en position d'écriture
  s'orienter en direction de 90
  avancer de 80
  répéter 2 fois
    tourner de 90 degrés
    avancer de 80
  
```

Représenter sur **la feuille annexe** le chemin parcouru par le chat.
 (Prendre un carreau pour 20 unités et placer le point A qui représente la position de départ du chat et le point B pour sa position finale.)

2) a) Quel est le numéro du dessin qui correspond au script 2 ci-dessous ?

Script 2

```

Quand  est cliqué
  mettre pas à 80
  stylo en position d'écriture
  s'orienter en direction de 90
  avancer de pas
  répéter 2 fois
    tourner de 90 degrés
    mettre pas à pas - 20
    avancer de pas
  
```

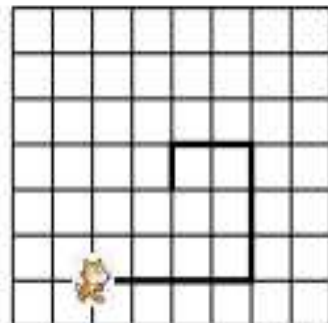
Le côté d'un carreau mesure 20 unités

1)

2)

3)

b) On souhaite modifier le script 2 pour parcourir le chemin représenté ci-dessous. Quelle(s) modification(s) peut-on apporter au script 2 pour parcourir ce chemin ?



FIN DU SUJET

FEUILLE ANNEXE A RENDRE AVEC VOTRE COPIE

Numéro d'anonymat :

Exercice 4 :

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2		2	2	3	1	4	4	2
Effectif Cumulé Croissant											

Exercice 8 :

CORRECTION BREVET BLANC MARS 2020

Exercice 1 :

- 1) Réponse C : 360 habitants
- 2) Réponse B : 1031
- 3) Réponse A : -2
- 4) Réponse C : $3^2 \times 7$
- 5) Réponse C : 3

Exercice 2 :

6) Périmètre = $2 \times \text{largeur} + 2 \times \text{Longueur}$
 $= 2 \times 60 + 2 \times 90$
 $= 120 + 180$
 $= 300 \text{ (m)}$

7) $6 \times 300 = 1800 \text{ (m)}$

Six tours représentent 1800 m

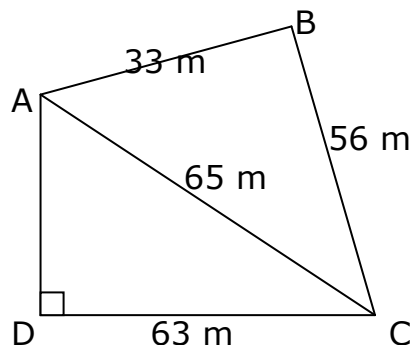
$\frac{1800}{9} = 200$ donc sa vitesse est de 200 m/min

$200 \text{ m/min} = 0,2 \text{ km/min} = 0,2 \times 60 \text{ km/h} = 12 \text{ km/h}$

8) A cette vitesse, combien mettra-t-il de temps pour parcourir 18 km ? Donner la réponse en heures et en minutes.

On a $t = \frac{d}{v} = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ (h)}$ et $1,5\text{h} = 1\text{h}30\text{min}$

Exercice 3 :



2) On sait que dans le triangle ABC le plus grand côté est [AC].

On a $AC^2 = 65^2 = 4225$

Et $AB^2 + BC^2 = 33^2 + 56^2 = 1089 + 3136 = 4225$

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Donc par la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

2) Aire de ABC = $\frac{AB \times BC}{2} = \frac{33 \times 56}{2} = 924 \text{ (m}^2\text{)}$

3) On sait que le triangle ADC est rectangle en D donc par le théorème de Pythagore on a : $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$65^2 = AD^2 + 63^2$

$4225 = AD^2 + 3969$

d'où $AD^2 = 4225 - 3969 = 256$

d'où $AD = \sqrt{256} = 16 \text{ (m)}$

4) On a : Aire de ADC = $\frac{AD \times DC}{2} = \frac{16 \times 63}{2} = 504 \text{ (m}^2\text{)}$

Donc Aire ABCD = Aire ABC + Aire ADC = 924 + 504 = 1428 (m²)

5) Une plaque a une aire de $2 \times 2 = 4 \text{ m}^2$

$$\frac{1428}{4} = 357$$

Il devra acheter 357 plaques.

Exercice 4 :

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2	6	2	2	3	1	4	4	2
Effectif Cumulé Croissant	1	3	5	11	13	15	18	19	23	27	29

5) $29 - 1 - 2 - 2 - \dots - 4 - 4 - 2 = 6$

Il y a 6 plantules de 14 cm.

6) Il y a 4 plantules ayant une taille de 8 ou 12 cm.

$$\frac{4}{29} \times 100 \approx 14$$

Donc environ 14% des plantules ont une taille de 8 ou 12 cm

7) Moyenne = $\frac{8 \times 2 + 12 \times 2 + 14 \times 6 + 16 \times 2 + 17 \times 2 + 18 \times 3 + 19 \times 1 + 20 \times 4 + 21 \times 4 + 22 \times 2}{29}$

$$= \frac{471}{29}$$

$$\approx 16,2$$

La taille moyenne est d'environ 16,2 cm

8) a) Effectifs cumulés croissants du tableau

b) Il y a 29 valeurs dans la série. On a : $29 : 2 = 14,5$

Donc la médiane est la 15^e valeur de la série.

Donc médiane = 17

c) On a autant de tailles inférieures à 17 cm que de tailles supérieures à 17

5) Etendue = $22 - 0 = 22$

9) Le premier 20 de la série est la 20^e valeur de la série.

Donc pour que 20 devienne la médiane il faut qu'il y ait au moins 39 valeurs en tout en ajoutant des plantules de 22 cm car ainsi $39 : 2 = 19,5$ et alors la médiane est la 20^e valeur de la série.

Etant donné qu'il y a 29 valeurs dans la série il faut donc ajouter 10 plantules de 22 cm au moins.

Exercice 5 :

3)

Diviseurs de 84 : 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 7 – 12 – 14 – 21 – 28 – 42 – 84

Diviseurs de 63 : 1 – 3 – 7 – 9 – 21 – 63

2)

c) On a comme nombre d'équipes possibles : 1, 3, 7 et 21

d) On peut donc faire au maximum 21 équipes

84 : 21 = 4 et il y aura 4 élèves de 4° par équipe

63 : 21 = 3 et il y aura 3 élèves de 3° par équipe

Exercice 6 :

Affirmation 1 :

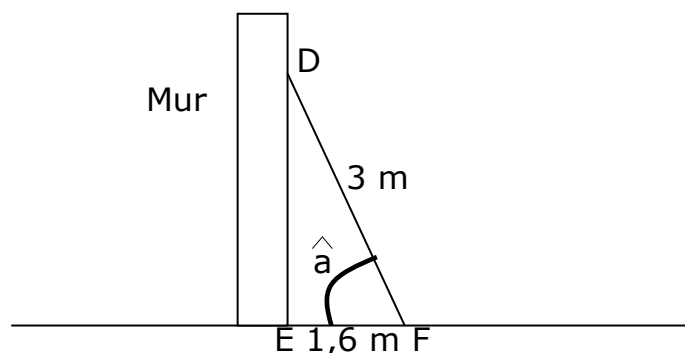
La fraction $\frac{504}{729}$ n'est pas irréductible car 504 et 729 sont divisibles par 9 (entre autres) donc l'affirmation est fausse

Affirmation 2 :

Après la première quinzaine il lui reste $\frac{3}{7}$ de ses chocolats.

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$ et il lui reste donc $\frac{1}{7}$ de ses chocolats, donc l'affirmation est vraie.

Affirmation 3 :



Dans le triangle DEF rectangle en E on a : $\cos(\hat{F}) = \frac{BC}{AC} = \frac{1,6}{3}$

Donc $\hat{a} = \text{Arccos}(\frac{1,6}{3}) \approx 58^\circ$

Donc l'affirmation est vraie, l'angle $\hat{a}$ est plus grand que 90°

Exercice 7 :

1) Taille = $0,8 \mu\text{m} = 0,8 \times 10^{-6} \text{ m} = 8 \times 10^{-7} \text{ m}$ en notation scientifique
= 0,000 000 8 m en notation décimale

2)

a) Au bout de 3h il reste environ 5000 bactéries

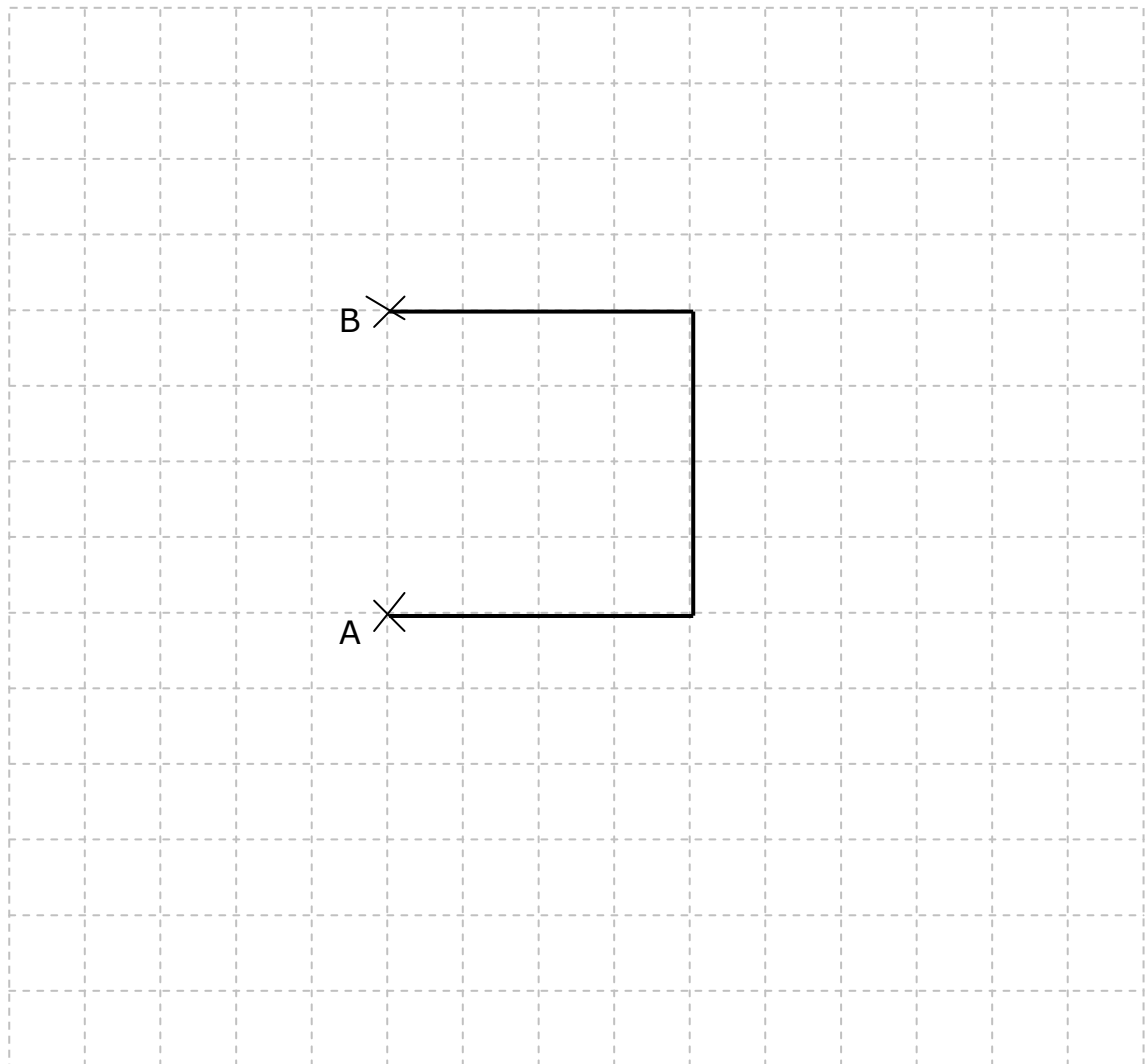
- b) Il reste environ 6000 bactéries au bout d'environ 2h15min
e) Au bout de 5h il reste environ 3500 bactéries, donc on a perdu 6500 bactéries.

$$\frac{6500}{10000} \times 100 = 65$$

En 5h on a perdu environ 65% des bactéries seulement donc l'antibiotique est inefficace

Exercice 8 :

1)



2) a) Le dessin 2 correspond au script 2

b) Il suffit de mettre « répéter 3 fois » au lieu de « répéter 2 fois »

BREVET BLANC 2016

Exercice 1 : 3,5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Dans le tableau fourni sur la feuille annexe, cocher la case correspondant à votre réponse.

On ne demande pas de justifier. Aucun point ne sera enlevé en cas de mauvaise réponse.

Questions posées		Réponses proposées		
		A	B	C
1	Marc a 10 ans et il pèse 30 kg. Quel sera son poids à 20 ans ?	60 kg	40 kg	On ne peut pas savoir
2	Quelle est la largeur d'un rectangle de longueur 8 cm et de périmètre 24 cm ?	3 cm	4 cm	16 cm
3	Si je réponds à cette question au hasard, quelle est la probabilité que ma réponse soit juste ?	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	On ne peut pas savoir
4	Si on remplace x par -2 dans l'expression $x^2 + 2x + 3$, on trouve :	3	- 5	-11
5	La médiane de la série de valeurs : 7; 8; 8; 12; 12; 14; 15; 15; 41	est supérieure à la moyenne de cette série.	est inférieure à la moyenne de cette série.	est égale à la moyenne de cette série.
6	Dans une classe de 30 élèves, les $\frac{2}{3}$ des élèves viennent en bus. Combien d'élèves ne viennent pas en bus ?	$\frac{2}{3} \times 30$	$1 - \frac{2}{3} \times 30$	$(1 - \frac{2}{3}) \times 30$
7	L'écriture scientifique de $0,173 \times 10^4$ est :	$0,173 \times 10^4$	$1,73 \times 10^3$	$1,73 \times 10^5$

Exercice 2 : 6 points

Un « DJ » possède 96 titres de musique rap et 104 titres de musique électro. Lors de ses concerts, il choisit les titres qu'il mixe au hasard.

- 1) Calculer la probabilité que le premier titre soit un titre de musique rap.
- 2) Pour varier ses concerts, le DJ souhaite répartir tous ses titres en réalisant des « mix » identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de titres et la même répartition de titres de musique « rap » et de musique « électro ».

a) Quel nombre maximum de concerts différents pourra-t-il réaliser ?

b) Combien y aura-t-il dans ce cas de titres de musique rap et de musique électro par concert

?

Exercice 3 : 5 points

Voici un programme de calcul :

PROGRAMME A

- Choisir un nombre.
- Ajouter 4.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Soustraire 4 au résultat obtenu.
- Soustraire le carré du nombre choisi au départ.

- 1) Albert essaie ce programme en partant de 2 et dit qu'il obtient 28. A-t-il raison ?
- 2) Bill essaie ce programme en partant de -3. Combien obtient-il ?

3) Voici un deuxième programme de calcul :

PROGRAMME B

- Choisir un nombre.
- Multiplier par 8.
- Ajouter 12 au résultat obtenu.

Charlène affirme : « Si on choisit n'importe quel nombre et qu'on lui applique les deux programmes, on obtient le même résultat. »

Prouver que Charlène a raison.

4) Pauline affirme qu'elle a trouvé zéro en appliquant les programmes. Quel nombre de départ a-t-elle choisi ?

Exercice 4 : 6 points

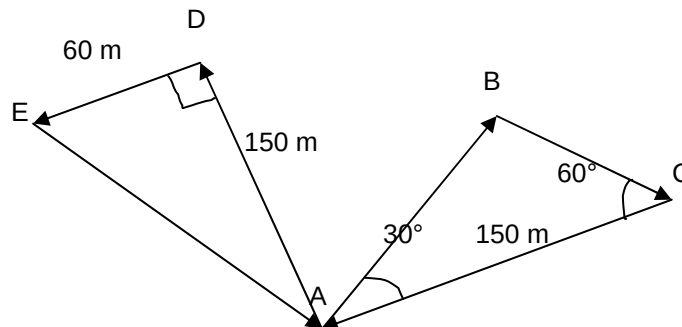
Albert et Bill vont participer à une course de drones.

Leurs drones vont suivre deux parcours différents, mais ils partent tous les deux du même point A comme indiqué sur ce schéma.

Le vainqueur sera le premier à revenir au point A. (Ce schéma ne respecte pas les vraies dimensions mais les indications fournies dessus sont exactes.)

Parcours de Bill

Parcours d'Albert



Le drone d'Albert va suivre le parcours défini par le chemin ABCA et celui de Bill va suivre le chemin défini par ADEA.

- 1) Montrer que le parcours effectué par le drone de Bill est plus long que celui effectué par celui d'Albert.
- 2) Le drone de Bill vole à la vitesse de 22 km/h et celui d'Albert à la vitesse de 25 km/h. Qui gagnera la course ?

Exercice 5 : 7,5 points

On a corrigé les épreuves de brevet blanc pour 2 classes de 3^{ème} du collège de Mourmelon-Le-Grand.
Les résultats sur 20 ont été les suivants :

12 3 15 11 14 7 13 20 12 10 17 13 14 13 6 6 8 12 9 16 10 9 3 15 5 13
13 12 18 15 6 11 10 14 6 14 8 17 10 11 16 10 8 16 9 11 10 14 7 13 19
12 .

- 1) Compléter ce tableau sur la feuille annexe .
(les fréquences en pourcentage seront arrondies à l'entier le plus proche.)

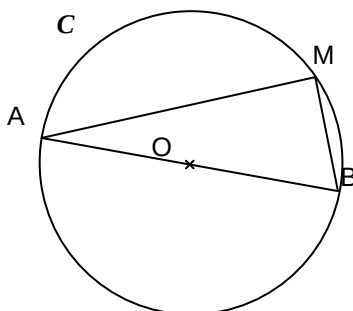
Classe	$0 \leq \text{note} < 4$	$4 \leq \text{note} < 8$	$8 \leq \text{note} < 12$	$12 \leq \text{note} < 16$	$16 \leq \text{note} \leq 20$
Effectif					
Effectif cumulé					
Fréquence en %					

- 2) Combien d'élèves étaient présents au contrôle ?
- 3) Combien d'élèves ont obtenu une note supérieure à 10 ?
- 4) Quel est le pourcentage d'élèves ayant eu au plus 7 ?
- 5) Les professeurs de mathématiques emmènent au Futuroscope les 25 élèves qui ont obtenu les meilleurs résultats. Kevin a eu 10. Partira-t-il au Futuroscope ?
- 6) Calculer la moyenne obtenue à ce brevet blanc pour ces élèves.

Exercice 6 : 4 points

- 1) Sur la feuille annexe, reproduire cette figure en vraie grandeur à l'aide des instruments sachant que :

- O est le centre du cercle C.
- [AB] est un diamètre de ce cercle.
- AB = 8 cm.
- AM = 6 cm.



- 2) Démontrer que AMB est un triangle rectangle en M.
- 3) Sur votre figure, construire M' le symétrique de M par rapport à O.
- 4) Quelle est la nature de AMBM' ? Le justifier.

Exercice 7 : 4 points

Simon et Garfunkel s'amuse à lancer simultanément deux dés non truqués à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Simon lance les deux dés et obtient 2 et 6. Il dit : "J'ai fait 2."

Garfunkel lance ensuite à son tour les deux dés et obtient 5 et 3. Il dit alors "Moi j'ai eu 1, j'ai perdu..."

Simon accepte de lui laisser une chance de le battre. Il lance donc à nouveau les deux dés et obtient alors 6 et 3. "J'ai donc fait 3."

Garfunkel lance les dés et obtient 4 et 4.

- 1) A-t-il obtenu plus que Simon ?

CORRECTION DU BREVET BLANC 2016 - MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 5 points

		A	B	C
	1			X
	2		X	
	3	X		
	4	X		
	5		X	
	6			X
	7		X	

Exercice 2 : 6 points

1) $P(\text{"Le premier titre est une musique de rap"}) = \frac{96}{200} = \frac{12}{25}$

2) a) On sait que :

- * Le nombre de mix est un diviseur du nombre de morceaux de rap
- * Le nombre de mix est un diviseur du nombre de morceaux électro
- * Le nombre de mix doit être maximal

Donc le nombre de mix est le PGCD du nombre de morceaux de rap et du nombre de morceaux électro.

On cherche PGCD (96 ; 104) avec l'algorithme d'Euclide.

Soit $p = \text{PGCD}(96 ; 104)$

$$104 = 1 \times 96 + 8 \text{ donc } p = \text{PGCD}(96; 8)$$

$$96 = 12 \times 8 + 0 \text{ donc } p = \text{PGCD}(8; 0) = 8$$

Donc $\text{PGCD}(96; 104) = 8$ et on peut réaliser **8 mix**

b) On a $96 : 8 = 12$ et $104 : 8 = 13$

Donc dans chaque mix il y aura **12 morceaux de rap et 13 morceaux électro**

Exercice 3 : 5 points

- 1)
- 1) 2
 - 2) $2+4=6$
 - 3) $6^2 = 36$
 - 4) $36 - 4 = 32$
 - 5) $32 - 2^2 = 32 - 4 = 28$

Albert obtient 28 en partant de 2

- 2)
- 1) -3
 - 2) $-3+4=1$
 - 3) $1^2 = 1$
 - 4) $1-4=-3$
 - 5) $-3 - (-3)^2 = -3-9=-12$

Bill obtient - 12 en partant de - 3

3)

On part d'un nombre x avec le premier programme.

- 1) x
- 2) $x+4$
- 3) $(x+4)^2$
- 4) $(x+4)^2 - 4$
- 5) $(x+4)^2 - 4 - x^2$

$$\text{Et on a } (x+4)^2 - 4 - x^2 = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 - 4 - x^2 = 8x + 16 - 4 = 8x + 12$$

Et avec le second programme :

- 1) x
- 2) $8x$
- 3) $8x + 12$

Les deux programmes sont identiques. **Charlène a raison.**

4) On cherche x tel que $8x + 12 = 0$

d'où $8x = -12$

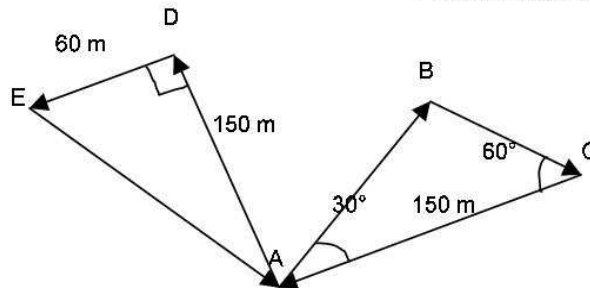
d'où $x = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

Pauline est partie du nombre $-\frac{3}{2}$

Exercice 4 : 6 points

Parcours de Bill

Parcours d'Albert



1) * Le triangle ADE est rectangle en D donc par le théorème de Pythagore on a :

$$AE^2 = DE^2 + DA^2$$

$$AE^2 = 60^2 + 150^2$$

$$AE^2 = 3600 + 22500$$

$$AE^2 = 26100$$

$$\text{donc } AE = \sqrt{26100} \approx 161,6 \text{ (m)}$$

$$DE + AE + AD \approx 60 + 161,6 + 150 \approx 371,6 \text{ (m)}$$

Le drone de Bill aura un parcours d'environ 371,6 m.

* Le triangle BCA est rectangle en B car il a deux angles complémentaires : $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$

$$\text{Donc } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{BA}{AC} \quad \text{d'où } \cos(30^\circ) = \frac{BA}{150} \quad \text{d'où } BA = 150 \times \cos(30^\circ) \approx 129,9 \text{ (m)}$$

$$\text{et } \cos(\widehat{BCA}) = \frac{BC}{AC} \quad \text{d'où } \cos(60^\circ) = \frac{BC}{150} \quad \text{d'où } BC = 150 \times \cos(60^\circ) = 75 \text{ (m)}$$

$$AB + BC + CA \approx 129,9 + 75 + 150 \approx 354,9 \text{ (m)}$$

le drone d'Albert aura lui un parcours d'environ 354,9 m.

Donc le parcours effectué par le drone de Bill est bien le plus long des deux.

2) Le drone de Bill est moins rapide que celui d'Albert et son parcours est plus long, donc **c'est le drone d'Albert qui gagnera la course.**

Exercice 5 : 7,5 points

1)

Classe	$0 \leq \text{note} < 4$	$4 \leq \text{note} < 8$	$8 \leq \text{note} < 12$	$12 \leq \text{note} < 16$	$16 \leq \text{note} \leq 20$
Effectif	2	4	6	14	4
Effectif cumulé	2	6	12	26	30
Fréquence en %	7	13	20	47	13

2) Il y avait **30 élèves présents.**

3) **19 élèves ont eu une note supérieure à 10.**

4) 6 élèves ont eu une note inférieure ou égale à 7.

$$\frac{6}{30} \times 100 = 20$$

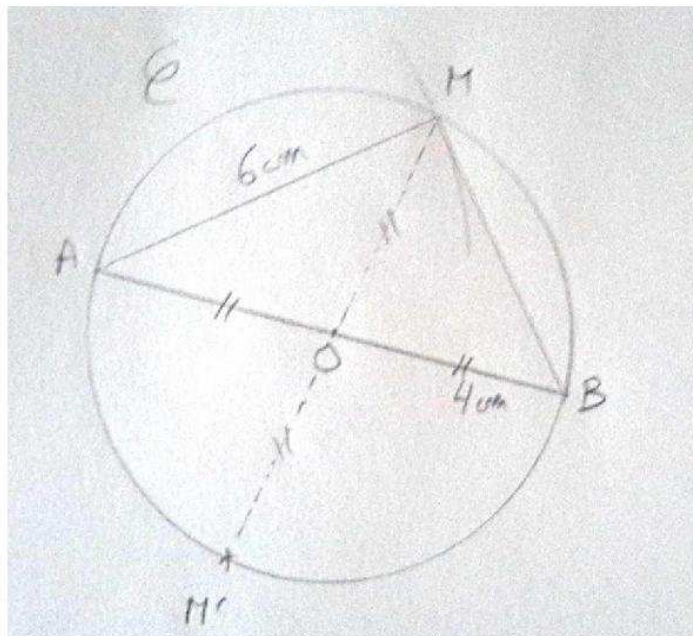
20% des élèves ont eu au plus 7.

5) **Kévin ira au futuroscope** car il y a 19 élèves sur 30 ayant une note supérieure à 10, donc il fait bien partie des 25 meilleurs.

$$6) \text{ Moyenne} = \frac{12 \times 4 + 3 \times 2 + 15 \times 3 + 11 + 14 \times 2 + 7 + 13 \times 5 + 20 + 10 \times 2 + 17 + 6 \times 2 + 8 + 9 \times 2 + 16 + 5 + 18}{30} \approx 11,5$$

Exercice 6 : 4 points

1) 3)



2) On sait que ABM est un triangle inscrit dans le cercle C et $[AB]$ est un diamètre de ce cercle, donc **AMB est un triangle rectangle en M .**

4) On sait que $[AB]$ est un diamètre du cercle C , donc O est le milieu de $[AB]$.

On sait que M' est le symétrique de M par rapport à O , donc O est le milieu de $[MM']$.

Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc $AMBM'$ est un parallélogramme.

On sait que $\widehat{AMB}$ est un angle droit car AMB rectangle en M .

Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.

Donc **$AMBM'$ est un rectangle.**

Exercice 7 : 2,5 points

1) On remarque que :

$$\text{PGCD}(2;6)=2$$

$$\text{PGCD}(5;3)=1$$

$$\text{PGCD}(6;3)=3$$

Donc le résultat du lancer est le PGCD du résultat des deux dés.

Garfunkel a eu 4 et 4 avec les dés et $\text{PGCD}(4;4)=4$

Donc **Garfunkel a eu plus que Simon.**

2)

PGCD	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

$$P(\text{"Obtenir 1 à ce jeu"}) = \frac{23}{36}$$

« Le plus grand écrivain que le monde ait connu est enfin de retour ! »

Stephen King

« Mes pièces de théâtre font pâle figure à côté de cet ouvrage. J'ai trouvé mon maître. »

William Shakespeare

« C'est tout simplement le plus grand livre scientifique depuis mes écrits ! »

Albert Einstein

« Mon théorème enfin expliqué de manière simple ! »

Pythagore

« Le best seller des années 2020 ! »

Maquettes de brouettes magazine